Notes sur la Consommation

Steve Ambler et André Kurmann
Département des sciences économiques
École des sciences de la gestion
Université du Québec à Montréal

Automne 2008

Table des matières

1 Introduction

Ces notes présentent une approche un peu plus générale à la consommation optimale que Romer (2005). En particulier, nous considérons directement un modèle à horizon infini, ce qui nous aidera par la suite quand nous parlons des modèles de cycle conjoncturels.

Tout le long de ce chapitre, nous travaillerons en **temps discret** pour des raisons de simplification et parce que la comparaison avec les données conjoncturelles est plus directe.

1.1 Mots clés

- Utilité marginale de la consommation
- Optimisation dynamique
- Contrainte budgétaire intertemporelle (consolidée)
- Principe de Bellman
- Équation d'Euler
- Aversion au risque (riscophobie)
- Hypothèse du revenu permanent
- Hypothèse de la marche aléatoire de la consommation
- Consumption CAPM (modèle dynamique de l'évaluation des actifs)
- Pricing kernel

– Prime de risque

– Épargne précautionaire

– Paradoxe de la prime de risque sur les actions

2 Modèle général

Considérons un individu représentatif qui maximise

$$U = E_t \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i u\left(C_{t+i}\right)$$

sujet aux **contraintes budgétaires intertemporelles** $i = 0...\infty$

$$Y_{t+i} + (1 + r_{t+i})A_{t+i} \geq A_{t+1+i} + C_{t+i}.$$

Les paramètres et variables sont définis comme suit :

– β est le taux d'escompte subjectif ;

– C_{t+i} est la consommation en $t + i$;

– Y_{t+i} est le revenu réel en $t + i$;

– A_{t+i} est le **vecteur** d'actifs détenus (achetés) en $t + i - 1$ venant à échéance en $t + i$ (ce vecteur peut comprendre le stock de capital) ;

– r_{t+i} est le vecteur de taux de rendements entre $t + i - 1$ et $t + i$ des différents actifs.

Nous supposons que les revenus Y_{t+i} ainsi que les taux de rendement individuels dans r_{t+i} suivent des processus stochastiques, ce qui implique que l'individu prend connaissance des réalisations de ces variables seulement au début de la période $t + i$ avant qu'il prenne sa décision de consommation et d'investissement en actifs. Afin de nous simplifier la vie, nous supposons par ailleurs que ces processus stochastiques sont exogènes, autrement dit ils ne sont pas influencées par les choix optimaux de l'individu. Nous nous trouvons donc toujours en équilibre partielle.

L'incertitude concernant Y_{t+i} et r_{t+i} veut que l'individu doit baser ces choix optimaux sur ses anticipations du futur. Ces anticipations sont incorporées dans l'opérateur E_t qui est l'espérance mathématique conditionnelle à l'information disponible en t.

Le modèle implique les restrictions suivantes :

1. les attentes sont rationnelles. On suppose que les attentes subjectives sont données par l'opérateur d'espérance mathématique ;
2. le consommateur maximise l'espérance de son utilité ;
3. la fonction d'utilité est séparable dans le temps et par rapport à d'autres arguments pouvant influencer l'utilité (par exemple le loisir) ;
4. les biens de consommation ne sont pas durables et les agents n'ont pas de persistence dans leurs habitudes de consommation.

Le modèle soulève un problème d'**optimisation dynamique** parce que le choix de C_{t+i} influence nécessairement l'épargne A_{t+i} et donc les possibilités de consommation de la période suivante. En effet, l'optimisation dynamique est un outil clé de la macro moderne parce que nous y devons faire face pour pratiquement tous nos choix.

Afin de résoudre ce problème d'optimisation dynamique, nous formulons le lagrangien

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= E_t\{u\left(C_t,\ldots\right)+\lambda_t\left(Y_t+(1+r_t)A_t-A_{t+1}-C_t\right)\\ &\quad +\beta u\left(C_{t+1},\ldots\right)+\beta\lambda_{t+1}\left(Y_{t+1}+(1+r_{t+1})A_{t+1}-A_{t+2}-C_{t+1}\right)\\ &\quad +\ldots\}\end{aligned}$$

ou en notation plus compacte

$$\mathcal{L}=E_t\left\{\sum_{i=0}^{\infty}\beta^i\left[u\left(C_{t+i},...\right)+\lambda_{t+i}(Y_{t+i}+(1+r_{t+i})A_{t+i}-A_{t+1+i}-C_{t+i})\right]\right\}.$$

Nous pouvons faire plusieurs remarques concernant ce lagrangien.

1. Il y a une infinité de termes et, pour cette raison, une infinité de variables de choix. Mais en comparant les CPOs (conditions du premier ordre) à travers les périodes, on peut vérifier que les règles de décision optimales sont les mêmes pour chaque période ; c'est à dire que la forme fonctionelle des différentes CPOs reste la même et le temps ne paraît pas comme une variable explicative dans les conditions d'optimalité de l'individu.[1] La valeur optimale des variables de choix en $t+i$ dépendra du stock d'actifs détenu par l'individu et de la réalisation des variables exogènes au début de

[1]Techniquement, les conditions du premier ordre pour l'individu vont mener à un système d'équations de différence première qui est **autonome**. Voir Chiang (1984, p.494) pour une discussion.

la période $t+i$ mais ceci toujours de la même façon. Nous pouvons donc nous limiter à calculer les CPOs pour les variables qui peuvent être choisies en période t. [2]

2. Le multiplicateur λ_{t+i} donne la valeur en termes d'unités d'utilité marginale **de la période** $t+i$ d'une unité de plus de ressources en $t+i$. Nous avons choisi d'écrire le lagrangien de cette façon afin de simplifier la résolution du problème. Nous aurions pu redefinir les multiplicateurs de Lagrange de la manière suivante : $\tilde{\lambda}_{t+i} \equiv \beta^i \lambda_{t+i}$. Ces nouveaux multiplicateurs mesurent la valeur d'une unité additionnelle de ressources mesurée en unités d'utilité marginale **de la période** t.

Les CPO pour les variables choisies en t donnent :

$$
\begin{aligned}
(C_t) \quad &: \quad \frac{\partial u}{\partial C_t} - \lambda_t = 0 \\
(A^n_{t+1}) \quad &: \quad -\lambda_t + \beta E_t\left((1 + r^n_{t+1})\lambda_{t+1}\right) = 0 \\
(\lambda_t) \quad &: \quad Y_t + (1 + r_t)A_t = A_{t+1} + C_t
\end{aligned}
$$

où n est le n^e actif dans le vecteur A_t et r^n_{t+1} est son taux de rendement entre t et $t+1$.

Remarques :

[2] Formellement, le théorème qui nous permet de procéder de cette manière s'appelle le principe d'optimalité ou bien le **principe de Bellman**. Ce principe dit que si la séquence de choix $\{C^*_t\ ,\ C^*_{t+1}\ ,\ C^*_{t+2}\ ,\ \ldots\}$ est optimal en période t, alors la séquence $\{C^*_{t+1}\ ,\ C^*_{t+2}\ ,\ \ldots\}$ doit toujours être optimale en période $t+1$. Pour ceux qui s'y intéressent vraiment, le livre de Stokey et Lucas (1989) énonce les conditions sous lesquelles le principe de Bellman s'applique et en montre la dérivation.

1. on suppose que il n'y a pas de ressources gaspillées, et donc la contrainte budgétaire tient avec égalité dans chaque période ;
2. la deuxième équation doit tenir pour **n'importe quel** actif A^n_{t+1} ;
3. la deuxième équation porte le nom **d'équation d'Euler**. Elle donne une relation dynamique entre un taux de rendement (espéré) et l'évolution de l'utilité marginale de la consommation ;
4. dans le cas où la fonction d'utilité est séparable entre ses arguments et où l'utilité marginale de la consommation ne dépend que de son propre niveau, les équations d'Euler donnent une relation dynamique entre un taux de rendement et l'évolution de la consommation. Pour voir cela, substituons λ_t par $\frac{\partial u}{\partial C_t}$ (ou bien $u'(C_t)$).[3] Nous obtenons

$$u'(C_t) = \beta E_t[(1 + r^n_{t+1})u'(C_{t+1})]. \tag{1}$$

Contrairement aux problèmes d'optimisation dynamique à horizon fini, nous ne pouvons plus trouver la séquence de choix optimaux $\{C^*_t\ ,\ C_{t+1}*\ ,\ C_{t+2}*\ ,\ \ldots\}$ avec une approche récursive. Par contre nous pouvons nous servir du principe de Bellman afin d'exprimer l'objectif maximisé de l'individu sous la forme suivante :

$$V(A_t) = \max_{\{C_{t+i}, A_{t+i}\}_{i=0}^{\infty}} [u(C_t) + \beta E_t V(A_{t+1})]$$

[3] Cette notation n'est pas tout à fait correcte puisque dans notre modèle général, la fonction $u(\cdot)$ peut potentiellement contenir d'autres arguments que C. Mais étant donné que nous avons supposé que ces différents arguments entrent de façon additive, nous pouvons les négliger et nous écrivons $u'(C)$ au lieu d'écrire $u_C(C\ ,\ \ldots)$.

sous contrainte que

$$Y_t + (1 + r_t)A_t \geq A_{t+1} + C_t.$$

Cette équation s'appelle la fonction de Bellman ou bien la fonction de valeur. Elle dit qu'étant donné l'état A_t, la valeur $V(A_t)$ de la séquence optimale $\{C_t^*\ ,\ C_{t+1}^*\ ,\ C_{t+2}^*\ ,\ \ldots\}$ doit satisfaire le choix optimal aujourd'hui plus la valeur espérée actualisée de la séquence optimale future $\{C_{t+1}^*\ ,\ C_{t+2}^*\ ,\ \ldots\}$. Nous allons utiliser des équations de Bellman dans plusieurs de nos problèmes d'optimisation intertemporelle. Au lab, vous allez voir comment ces équations peuvent être utilisées pour trouver la séquence de choix optimaux
$\{C_t^*\ ,\ C_{t+1}^*\ ,\ C_{t+2}*\ ,\ \ldots\}$.

3 Travailler avec la contrainte budgétaire intertemporelle

Avant de continuer, un petit mot sur la contrainte budgétaire. Des fois il est plus commode de laisser la séquence de contraintes budgétaires de $t + i$ lorsqu'on écrit le problème. Des fois il est plus facile algébriquement de travailler avec la **contrainte budgétaire intertemporelle** ou **consolidée** du ménage. Il est important de savoir comment passer entre les deux formulations. On devrait toujours obtenir les mêmes réponses avec une séquence de contraintes budgétaires qu'avec la contrainte consolidée, mais des fois l'algèbre est nettement plus facile avec une approche par rapport à une autre.

La contrainte budgétaire au temps t est alors :

$$Y_t + (1 + r_t)A_t = A_{t+1} + C_t$$

La contrainte au temps $t + 1$ est donc :

$$Y_{t+1} + (1 + r_{t+1})A_{t+1} = A_{t+2} + C_{t+1},$$

et pour la période $t + i$:

$$Y_{t+i} + (1 + r_{t+i})A_{t+i} = A_{t+i+1} + C_{t+i}.$$

Pour arriver à la contrainte consolidée, il faut additionner ensemble la séquence de contraintes **actualisées**, tout en cherchant le facteur d'actualisation qui permettra de faire disparaître les valeurs futures de A_{t+i}. Clairement, si on mutliplie la deuxième contrainte par $1/(1 + r_{t+1})$, les A_{t+1} des deux côtés des égalités vont s'annuler, mais on aura $A_{t+2}/(1 + r_{t+1})$ du côté droit de la contrainte en $t + 1$. Pour cette raison, il faudra multipier la contrainte en $t + 2$ par $1/((1 + r_{t+1})(1 + r_{t+2}))$ pour que les termes en A_{t+2} des deux côtés des équations s'annulent. De façon générale, pour que les termes des deux côtés des équations s'annulent, il va falloir multiplier la contrainte budgétaire de la période $t + i$ par :

$$\prod_{j=1}^{i} \frac{1}{(1 + r_{t+j})}.$$

Dans le cas où le taux d'intérêt réel est constant, cette expression se simplifie et devient égale tout simplement à

$$\left(\frac{1}{(1+r)}\right)^i.$$

Nous obtenons la séquence de contraintes actualisées suivante :

$$\begin{aligned}
Y_t + (1+r_t)A_t &= A_{t+1} + C_t, \\
\frac{1}{(1+r_{t+1})}Y_{t+1} + A_{t+1} &= \frac{1}{(1+r_{t+1})}\left(A_{t+2} + C_{t+1}\right), \\
\frac{1}{(1+r_{t+1})}\frac{1}{(1+r_{t+2})}Y_{t+2} + \frac{1}{(1+r_{t+1})}A_{t+2} &= \\
& \frac{1}{(1+r_{t+1})}\frac{1}{(1+r_{t+2})}\left(A_{t+3} + C_{t+2}\right), \\
& \ldots
\end{aligned}$$

Maintenant, quand on calcule la somme de toutes ces contraintes on obtient :

$$(1+r_t)A_t + \sum_{i=0}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{i}\frac{1}{(1+r_{t+j})}\right)Y_{t+i} = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{i}\frac{1}{(1+r_{t+j})}\right)C_{t+i}. \quad (2)$$

La contrainte consolidée nous dit que la somme des revenus futurs actualisés plus la richesse initiale doit être égale à la somme des dépenses futures de consommation actualisées.

Morale de l'histoire : le truc pour trouver la contrainte budgétaire consolidée ou intertemporelle est d'utiliser le bon facteur d'actualisation qui fait disparaître les stocks de richesse à part la richesse initiale.

4 Trois cas spéciaux

4.1 Cas spécial 1 : modèle de la section 7.1 du livre

Prenons le cas où l'horizon de planification est limité à T périodes et la richesse initiale du consommateur est donnée par le scalaire A_0. Par ailleurs, supposons qu'il n'y a pas d'incertitude, que $\beta = 1$, et que $r_t = 0$ pour tout t.

La CPO par rapport à C_t reste pareil que dans le cas général :

$$u'(C_t) = \lambda_t.$$

Par contre, les CPO par rapport aux actifs deviennent :

$$\lambda_t = \lambda_{t+1}$$

L'équation d'Euler (1) devient alors :

$$u'(C_t) = u'(C_{t+1}),$$

ce qui veut dire que la consommation optimale est constante durant la vie de l'individu.

En appliquant la contrainte consolidée (2) au cas présent, nous obtenons (7.2) du livre (qui est une égalité stricte s'il n'y a pas de gaspillage de ressources) :

$$\sum_{t=1}^{T} C_t = A_1 + \sum_{t=1}^{T} Y_t$$

Si la consommation est constante nous obtenons tout de suite (7.5) :

$$C_t = \frac{1}{T}\left(A_1 + \sum_{\tau=1}^{T} Y_\tau\right) \text{ pour tout } t.$$

L'individu dépense la même fraction de sa richesse (richesse initiale plus la valeur actualisée du revenu qu'il va gagner au cours de sa vie) sur la consommation chaque période. La consommation dans une période donnée n'est donc pas déterminée par son revenu dans la même période mais par la somme de revenu sur sa vie, ou le **revenu permanent** dans le langage de Friedman (1957). C'est **l'hypothèse du revenu permanent**.

4.2 Cas spécial 2 : taux d'intérêt et épargne

Supposons de nouveau qu'il n'y a pas d'incertitude et prenons le cas spécial où l'individu a une aversion relative constante au risque (CRRA=Constant Relative Risk Aversion)

$$u(C) = \frac{1}{1-\theta} C^{1-\theta},$$

où $\theta \geq 0$ est le coefficient d'aversion au risque.

L'objectif de l'individu s'écrit alors comme

$$U = E_t \sum_{i=1}^{\infty} \beta^i \frac{1}{1-\theta} {C_{t+i}}^{1-\theta}$$

Par ailleurs, l'équation d'Euler pour l'actif n devient alors

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = \left(\beta(1 + r_{t+1}^n)\right)^{1/\theta}$$

Le taux de croissance de la consommation est directement relié au taux d'intérêt. Une augmentation du taux d'intérêt fait augmenter l'épargne à moins que l'effet de revenu sur la consommation soit positive et très forte. Nous pouvons illustrer ceci dans le cadre de notre modèle simple à deux périodes. Voir le livre, section 7.4 pour plus de discussion.

4.3 Cas spécial 3 : l'hypothèse de la marche aléatoire

Introduisons maintenant l'incertitude et supposons que le taux de rendement certain et constant r tel que

$$\beta(1 + r) = 1,$$

et que la fonction d'utilité $u(\cdot)$ est quadratique :

$$u(\cdot) = C_t - \frac{a}{2}{C_t}^2$$

L'équation d'Euler en (1) pour cette fonction d'utilité et ce taux de rendement est

$$C_t = E_t C_{t+1}$$

Si les attentes sont rationnelles, la réalisation de C_{t+1} est différente de son espérance par une erreur de prévision non corrélée avec l'information disponible en t :[4]

$$C_{t+1} = E_t C_{t+1} + \epsilon_{t+1}$$

En combinant les deux équations, nous obtenons

$$C_{t+1} = C_t + \epsilon_{t+1}.$$

Ceci est le résultat célèbre de Hall (1978) selon lequel la consommation devrait suivre une **marche aléatoire** : la meilleure prévision de la consommation en $t + 1$ est le niveau de consommation en t. Cette hypothèse est une extension de l'hypothèse du revenu permanent. Elle dit que la consommation change seulement dans la mesure que le revenu permanent change de manière non-anticipée. Par conséquent, le nouveau niveau de consommation n'est pas anticipé de revenir à son ancien niveau.

On peut tester cette théorie en régressant C_t sur C_{t-1} et en regardant si d'autres variables connues en $t - 1$ rajoutent du pouvoir explicative à cette équation. Hall, dans son texte de 1978, ne rejète pas la théorie. Mais Flavin (1983) et d'autres par la suite (e.g. Campbell et Mankiw, 1989 ; Shea, 1995) on trouvé des variables qui aident à prédire les changements dans le niveau de la consommation, ce qui constitue un rejet de la théorie.

[4]Cet erreur de prévision doit forcément être relié à des variations de l'estimation de l'individu des ressources totales dont il disposera dans sa vie.

5 L'évaluation des prix des actifs ("Consumption CAPM")

Rappelons que pour un actif quelconque n nous avons l'Équation d'Euler suivante :

$$u'(C_t) = \beta E_t[(1 + r^n_{t+1})u'(C_{t+1})].$$

Afin de simplifier la dérivation, exprimons cette équation comme :

$$1 = \beta E_t \left[(1 + r^n_{t+1})M_{t+1}\right],$$

où $M_{t+1} \equiv \beta \frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)}$. Dans la littérature, ce ratio des utilités marginales est souvent appelé le "pricing kernel" et représente le prix relatif en termes d'utilité marginale escompté d'un rendement en $t + 1$. Pour un actif hors risque – i.e. un actif dont le rendement $\tilde{r}_{t+1}$ est déjà connu en t (taux de rendement **certain** ou **sans risque**) – cette équation peut être reécrite comme suit :

$$1 = (1 + \tilde{r}_{t+1})E_t \left[M_{t+1}\right].$$

Maintenant, utilisons l'identité fondamentale suivante pour deux variables aléatoires quelquonque X et Y

$$E_t(XY) - E_t(X)E_t(Y) \equiv \text{Cov}_t(X, Y)$$

où Cov_t est la covariance conditionnelle à l'information en t. En appliquant cette identité à l'équation d'Euler ci-haut, nous obtenons

$$1 = E_t(M_{t+1})E_t(1 + r^n_{t+1}) + \text{Cov}_t(M_{t+1}, 1 + r^n_{t+1}).$$

En utilisant l'équation pour l'actif sans risque, nous obtenons

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{(1 + \tilde{r}_{t+1})} E_t(1 + r^n_{t+1}) + \text{Cov}_t(M_{t+1}, 1 + r^n_{t+1}) \\
(1 + \tilde{r}_{t+1}) &= E_t(1 + r^n_{t+1}) + (1 + \tilde{r}_{t+1})\text{Cov}_t(M_{t+1}, 1 + r^n_{t+1}) \\
&= E_t(1 + r^n_{t+1}) + \frac{\text{Cov}_t(M_{t+1}, 1 + r^n_{t+1})}{E_t(M_{t+1})}
\end{aligned}$$

ou bien

$$E_t(r^n_{t+1}) = \tilde{r}_{t+1} - \frac{\text{Cov}_t(M_{t+1}, 1 + r^n_{t+1})}{E_t(M_{t+1})}.$$

Cette équation est l'expression fondamentale du modèle d'évaluation des actifs, le "Consumption CAPM". Elle stipule que l'actif risqué n a un rendement espéré $E_t(r^n_{t+1})$ inférieur au rendement de l'actif hors risque $\tilde{r}_{t+1}$ si ce rendement covarie positivement avec le kernel M_{t+1}. Nous appelons cet écart $E_t(r^n_{t+1}) - \tilde{r}_{t+1}$ la **prime de risque**. L'intuition pour le "Consumption CAPM" est la suivante : une covariance positive nous dit que le rendement sur cet actif risqué n a tendance à être élevé lorsque $M_{t+1} \equiv \beta \frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)}$ et donc l'utilité marginale de la consommation future est élevée. En d'autres termes, le taux de rendement de cet actif risqué n a tendance à être élevé lorsque les gens en ont besoin, i.e. en périodes où l'économie subit des chocs négatifs qui font baisser le niveau de la consommation agrégée et donc font augmenter l'utilité marginale de la consommation. Donc, l'actif en question fournit de l'assurance à l'individu et c'est pourquoi l'individu accepte de le détenir à un rendement espéré inférieur au rendement de l'actif certain.

C'est intuition est étroitement reliée à celle du modèle "CAPM" traditionel que vous connaissez de vos cours de finance. Ce modèle est décrit par l'équation

$$E_t(r^n_{t+1}) = \tilde{r}_{t+1} + \beta E_t(r^m_{t+1} - \tilde{r}_{t+1}),$$

où $\beta = \frac{\text{Cov}_t(r^m_{t+1}, r^n_{t+1})}{V_t(r^m_{t+1})}$ avec r^m_{t+1} égale au rendement du marché. Dans ce modèle, le rendement du marché est une mesure inverse de l'utilité marginale en $t+1$. Une covariance **négative** entre le rendement risqué et le **rendement du marché** indique un actif risqué dont le rendement a tendance à être élevé quand le marché en général fait moins bien ; i.e. quand les gens en ont besoin.

6 Le paradoxe de la prime sur les actions

La question empirique du Consumption CAPM devient alors si la valeur de la covariance sont assez grandes pour justifier les primes de risques observés historiquement. En effet, Mehra et Prescott (2003), dans leur survol de la littérature, documentent que l'écart entre les taux de rendement moyens sur les actions et les obligations gouvernementales était en moyenne entre 4% et 9% pour le dernier siècle, et ceci pour plusieurs pays industrialisés. Par ailleurs, cette prime a encore augmenté en moyenne pendant les 30 dernières années.

Dans un texte célèbre, Mehra et Prescott (1986) montrent que les modèles standard de la consommation, tels que nous considérons ici, sont incompatibles avec ces primes historiques. Afin d'illustrer ce résultat, nous devons supposer une forme fonctionnelle particulière pour $u(.)$. Ensuite, nous procédons à une approximation de Taylor de deuxième ordre afin de pouvoir comparer les différents termes du modèle aux données.[5] Le but est de développer une expression simple pour la prime de risque. Ensuite, nous allons essayer d'évaluer numériquement les termes de cette expression afin de faire ressortir le "paradoxe".

Supposons alors de nouveau que les individus ont une fonction d'utilité du type CRRA. Nous avons

$$U(C_t) = \frac{(C_t)^{1-\theta}}{1-\theta},$$

où θ capte l'aversion relative au risque. L'équation d'Euler, pour un actif quelconque, dans ce cas-ci devient

$$(C_t)^{-\theta} = \beta E_t \left((1 + r^n_{t+1})(C_{t+1})^{-\theta} \right), \tag{3}$$

[5] Dans leur papier original, Mehra et Prescott (1985) dérivent une expression pour la prime de risque sans faire recours aux approximations. Par contre, ils doivent supposer que les taux de rendements escomptés suivent une distribution lognormale. La solution est très semblable à celle que nous dérivons ici. Voir Campbell, Lo and McKinley (1997, ch. 8) pour les détails.

ce qui nous donne

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\beta} &= E_t\left((1+r^n_{t+1})\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\theta}\right) \\
\frac{1}{\beta} &= E_t\left((1+r^n)(1+g^c)^{-\theta}\right).
\end{aligned}
$$

où nous avons laissé tomber les indices du temps en raison de simplifer la notation et où nous définissons g^c comme le taux de croissance de la consommation.

En calculant maintenant une expansion de Taylor du deuxième ordre du produit à droite de l'opérateur d'espérance mathématique autour des valeurs $\overline{r^n}$ et $\overline{g}^c$ moyennes nous donne :

$$
\begin{aligned}
(1+r^n)(1+g^c)^{-\theta} \approx\ & (1+\overline{r^n})(1+\overline{g}^c)^{-\theta} \\
& +(1+\overline{g}^c)^{-\theta}(r^n-\overline{r^n}) + (1+\overline{r^n})(-\theta)(1+\overline{g}^c)^{(-\theta-1)}(g^c-\overline{g}^c) \\
& +\frac{1}{2}(-\theta)(-\theta-1)(1+\overline{r^n})(1+\overline{g}^c)^{(-\theta-2)}(g^c-\overline{g}^c)^2 \\
& +2\cdot\frac{1}{2}(-\theta)(1+\overline{g}^c)^{(-\theta-1)}(r^n-\overline{r^n})(g^c-\overline{g}^c).
\end{aligned}
$$

La première ligne de l'approximation contient le terme d'ordre zéro. La deuxième ligne contient les deux termes d'ordre un. Les lignes suivantes contiennent les termes d'ordre deux. Maintenant, pour simplifier, on choisit d'approximer autour du point où $\overline{r^n} = \overline{g}^c = 0$. Avec une fréquence d'observation élevée (par exemple mensuelle), le taux de croissance (net) per capita de la consommation devrait être faible, ainsi que le taux de rendement net sur la plupart des actifs. Ceci nous donne :

$$(1+r^n)(1+g^c)^{-\theta} \approx 1 + r^n - \theta g^c - \theta g^c r^n + \frac{1}{2}\theta(1+\theta)(g^c)^2.$$

En appliquant l'opérateur d'espérance à cette expression (et en laissant tomber l'indice du temps associé à l'opérateur), nous obtenons (en se rappelant que $E(XY) = E(X)E(Y) + \text{Cov}(X,Y)$ et $\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\beta} &= 1 + E(r^n) - \theta E(g^c) - \theta\left(E(r^n)E(g^c) + \text{Cov}(r^n, g^c)\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\theta(1+\theta)\left(E(g^c)^2 + \text{Var}(g^c)\right).\end{aligned}$$

On va supposer que les deux produits d'espérances, $E(r^n)E(g^c)$ et $E^2(g^c)$, sont tellement petits que l'ont peut les laisser tomber. La variance et la covariance dans cette équation ont toujours l'interprétation de variance et covariance **conditionnelles**. Si la période d'analyse est suffisamment courte ceci devrait en fait être le cas. Nous avons donc :

$$E(r^n) = \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) + \theta E(g^c) + \theta\text{Cov}(r^n, g^c) - \frac{1}{2}\theta(1+\theta)\text{Var}(g^c).$$

Cette expression doit tenir pour **n'importe quel actif** et donc aussi pour l'actif sans risque dont la covariance avec le taux de croissance de la consommation est nulle :

$$\tilde{r} = \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) + \theta E(g^c) - \frac{1}{2}\theta(1+\theta)\mathrm{Var}(g^c).$$

Soustrayant cette équation de celle pour l'actif risqué, nous obtenons :

$$E(r^n) - \tilde{r} = \theta \mathrm{Cov}(r^n, g^c).$$

Dans les données, l'écart moyen entre le taux de rendement sur les actions et le taux de rendement certain est de l'ordre de 6% (entre 4% et 9%). Par ailleurs, la covariance conditionnelle entre le taux de rendement sur les actions et le taux de croissance de la consommation est approximativement égale à 0.0024.[6] Pour expliquer ces deux phénomènes avec notre modèle, il faudrait alors que :

$$\theta = \frac{0.06}{0.0024} = 25.$$

Ce chiffre est complètement incompatible (trop élevé) à la lumière de toutes les études empiriques sur base de données microéconomiques que nous connaissons. En d'autres termes, la covariance empirique observée entre r^n et g^c n'est pas suffisemment élevée pour rationaliser une prime de risque aussi haute, d'où le paradoxe.

Le paradoxe est un sujet de recherche actuel important en macroéconomie. Voir Kocherlakota (1996) pour un survol de résultats récents.

[6] On peut calculer cette covariance directement des données ou bien en appliquant la formule du coefficient de corrélation : $\mathrm{Cov}(r^n, g^c) = \rho(r^n, g^c)\sigma(r^n)\sigma(g^c)$, où $\rho(\cdot)$ est le coefficient de corrélation et $\sigma(\cdot)$ est l'écart-type. D'après Romer, on trouve dans les données que $\rho(r^n, g^c) = 0.4$, $\sigma(r^n) = 0.167$ et $\sigma(g^c) = 0.036$.

Cette version : 11/08/2008