Croissance optimale

Steve Ambler

Département des sciences économiques

École des sciences de la gestion

Université du Québec à Montréal

janvier 2003

1 Introduction

- Objectifs de cette partie du cours:

  1. Étudier et comprendre certains modèles de base utilisés en théorie macroéconomique.
  2. Mettre un accent sur des aspects méthodologiques qui peuvent être appliqués à des modèles plus complexes: stationnarisation, théorèmes du bien-être, etc.

2 Modèle de base (Ramsey-Cass-Koopmans)

- Je suis la présentation du modèle du chapitre 2 du livre de Romer (2000) avec quelques changements. Entre autres, je fais une analyse en temps discret et non en temps continu.

2.1 Ménage

- Fonction d'utilité du ménage représentatif:

$$U = E_t \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \frac{{C_{t+i}}^{(1-\theta)}}{1-\theta} \frac{L_{t+i}}{H}. \tag{1}$$

- Définition des variables:

  C_{t+i} – consommation de chaque membre du ménage;

  L_{t+i} – population totale;

  H – nombre de ménages.

- Contrainte budgétaire (flux au temps t):

$$w_t \frac{L_t}{H} + R_t \frac{K_t^s}{H} = C_t \frac{L_t}{H} + \frac{I_t}{H}. \tag{2}$$

- Définition des variables:

  K_t^s – stock de capital agrégé;

  I_t – dépenses d'investissement agrégées;

  w_t – salaire-horaire réel;

  R_t – taux de location du capital;

- Loi de mouvement du capital:

$$K_{t+1}^{s} = (1-\delta)K_t^s + I_t. \tag{3}$$

- Loi de mouvement de la population:

$$L_{t+1} = (1+n)L_t, \quad n > 0. \tag{4}$$

2.2 Production agrégée

- Fonction de production agrégée:

$$Y_t = s_t \left(A_t L_t\right)^{\alpha} {K_t}^{(1-\alpha)} \tag{5}$$

- Il est généralement reconnu que le niveau du progrès technique n'est pas stationnaire, mais suit plutôt une tendance. Nous avons l'option de modéliser cette tendance par une tendance *déterministe* ou par une tendance *stochastique*.

- Progrès technique et chocs de productivité (tendance déterministe):

$$A_t = (1+g)A_{t-1}, \quad g > 0, \tag{6}$$

$$s_t = {s_{t-1}}^{\rho} \exp(v_t), \quad 0 < \rho < 1, \tag{7}$$

  où v_t est un choc bruit blanc (imprévisible).

- Progrès technique (tendance stochastique):

$$\ln(A_t) = g + \ln(A_{t-1}) + v_t, \tag{8}$$

$$s_t = 1, \tag{9}$$

où v_t est un choc bruit blanc (imprévisible).

- Mesurons la productivité par le *résidu de Solow*,

$$\ln(Y_t) - \alpha \ln(L_t) - (1-\alpha)\ln(K_t) \equiv Z_t$$

- Dans le cas d'une tendance déterministe, nous avons:

$$Z_t = \ln(s_t) + \alpha\left(\ln(1+g) + \ln(A_{t-1})\right)$$

$$\approx \ln(s_t) + \alpha\left(g + \ln(A_{t-1})\right)$$

$$= \ln(s_t) + \alpha\left(g \cdot (t-1) + \ln(A_0)\right)$$

- Dans le cas d'une tendance stochastique, nous avons:

$$Z_t = \alpha\left(g + \ln(A_{t-1}) + v_t\right).$$

- Dans le premier cas, la productivité (en logs) est stationnaire autour d'une tendance linéaire déterministe, mais elle est persistente. Après un choc, elle va revenir à la tendance linéaire donnée par $A_0 + g \cdot t$.

- Dans le deuxième cas, la productivité a une racine unitaire. Un choc v_t va faire dévier la productivité de façon permanente par rapport à la droite $A_0 + g \cdot t$.

2.3 Firme représentative concurrentielle

- La firme représentative concurrentielle a la fonction de profits donnée par:

$$\pi_t = Y_t - w_t L_t^d - R_t K_t^d, \tag{10}$$

où L_t^d est sa quantité de travail demandée et K_t^d est son capital demandé.

- La maximisation des profits (problème statique) donne:

$$w_t = \alpha s_t {A_t}^{\alpha} L_t^{d(\alpha-1)} K_t^{d(1-\alpha)}, \tag{11}$$

$$R_t = (1-\alpha) s_t \left(A_t L_t^d\right)^{\alpha} K_t^{d-\alpha}. \tag{12}$$

2.4 Problème de maximisation du ménage

- Lagrangien du problème:

$$\begin{aligned}
\max_{C_{t+i}\,,\,K^s_{t+1+i}\,,\,\lambda_{t+i}\,,\,\forall i\geq 0} \mathcal{L} = E_t \Bigg\{ & \frac{{C_t}^{(1-\theta)}}{1-\theta}\frac{L_t}{H} \\
& +\lambda_t \left(w_t \frac{L_t}{H} + R_t \frac{K_t^s}{H} + (1-\delta)\frac{K_t^s}{H} - C_t \frac{L_t}{H} - \frac{K_{t+1}^s}{H} \right) \\
& +\beta \frac{{C_{t+1}}^{(1-\theta)}}{1-\theta}\frac{L_{t+1}}{H} \\
& +\beta\lambda_{t+1} \left(w_{t+1} \frac{L_{t+1}}{H} + R_{t+1} \frac{K_{t+1}^s}{H} + (1-\delta)\frac{K_{t+1}^s}{H} - C_{t+1} \frac{L_{t+1}}{H} - \frac{K_{t+2}^s}{H} \right) \\
& + \ldots \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{13}$$

- Notez que K_t^s ne fait pas partie des variables de choix du ménage. Ceci reflète le fait que lorsque le ménage maximise en temps t, le stock de capital de la période t est prédéterminé.

- Les CPO pour le choix de la consommation sont:

$$E_t \left[\beta^i {C_{t+i}}^{-\theta} \frac{L_{t+i}}{H} - \beta^i \lambda_{t+i} \frac{L_{t+i}}{H} \right] = 0, \quad \forall i \tag{14}$$

  Ceci donne immédiatement:

$$E_t {C_{t+i}}^{-\theta} = E_t \lambda_{t+i}$$

- Les CPO pour le choix du capital de la fin de la période $t + i$ donnent:

$$E_t \left\{ -\lambda_{t+i} + \beta \left(\lambda_{t+i+1} \left[(1 - \delta) + R_{t+i+1} \right] \right) \right\} = 0 \tag{15}$$

  Cette équation devient une équation d'Euler pour la consommation si on substitue les multiplicateurs de Lagrange à l'aide de l'équation (14).

- Les CPO par rapport à λ_{t+i} donnent les contraintes budgétaires.

2.5 Conditions d'équilibre

$$L_t = L_t^d,$$

$$K_t^s = K_t^d = K_t$$

$$Y_t + (1 - \delta) K_t = C_t L_t + K_{t+1}$$

- Les CPO pour la maximisation des profits par la firme donnent:

$$w_t = \alpha Y_t / L_t, \tag{16}$$

$$R_t = (1 - \alpha) Y_t / K_t. \tag{17}$$

- Ces deux conditions donnent immédiatement:

$$w_t L_t + R_t K_t = \alpha Y_t + (1 - \alpha) Y_t = Y_t, \tag{18}$$

- Ceci est un exemple du Théorème d'Euler.

2.6 Système dynamique et stationnarisation

- Sources de non-stationnarité dans le modèle:

  1. croissance démographique ($n > 0$);

  2. croissance de la productivité ($g > 0$).

- Définissons:

$$c_t \equiv C_t / A_t$$

  (consommation par travailleur effectif),

$$k_t \equiv \frac{K_t}{A_t L_t}$$

  (capital par travailleur effectif).

- Afin d'analyser (graphiquement ou numériquement) l'équilibre du modèle, il faut transformer les variables afin qu'elles soient stationnaires.

- Si nous utilisons des techniques lagrangiennes, ceci est possible après le calcul des CPO.

- Si nous utilisons la programmation dynamique (nous y reviendrons dans la partie du cours sur les modèles réels du cycle), en principe il faut le faire *avant* d'écrire les équations de Bellman.[1]

3 Analyse graphique du modèle

- Dans cette section, nous allons laisser tomber les opérateurs d'espérance mathématique, en supposant que les individus ont des attentes subjectives certaines concernant l'évolution future des variables exogènes du modèle, ou alors en invoquant une hypothèse de *prévoyance parfaite*.

- On suppose aussi une tendance déterministe pour le progrès technique avec $s_t = 1$.

- Après un peu de travail (voir Annexe A), nous pouvons réduire notre système aux deux équations suivantes:

$$\ln c_{t+1} - \ln c_t = \frac{\ln\left((1-\delta) + (1-\alpha)k_{t+1}^{-\alpha}\right) + \ln\beta - \theta g}{\theta} \tag{19}$$

$$(1+n)(1+g)k_{t+1} = (1-\delta)k_t + k_t^{(1-\alpha)} - c_t$$

$$\Rightarrow k_{t+1} - k_t = k_t^{(1-\alpha)} - \delta k_t - (n+g)k_{t+1} - c_t \tag{20}$$

- La première équation est l'équivalent de (2.22) dans Romer. La deuxième est l'équivalent de (2.23), à part le fait d'être en temps discret.

- Nous pouvons représenter le système graphiquement par un portrait de phase semblable au Graphique 2.3 dans Romer.

[1] On utilisera alors des techniques de "stationary discounted dynamic programming".

- Ce qui permet de choisir le sentier convergent du système revient à imposer une *condition de transversalité* sur le problème du ménage.

3.1 Sentier de croissance équilibré

- Le stock de capital par travailleur effectif converge à k^* à long terme. Comment se comportent les variables du modèle lorsque $k = k^*$?
- K = kAL, donc le stock de capital croît avec un taux de croissance $(n + g)$.
- Avec des rendements à l'échelle constants dans la production, l'output Y croît lui aussi au taux $(n + g)$.
- Le capital par travailleur K/L et l'output par travailleur Y/L augmentent avec un taux de croissance de g.
- Sur ce sentier de croissance équilibré, le taux de croissance de l'output par travailleur ne dépend que du taux de progrès technique g.

4 Linéarisation et analyse du modèle stochastique

- Pour une variable quelconque x_t, définissons:

$$\hat{x}_t \equiv \frac{x_t - \bar{x}}{\bar{x}}$$

  où $\bar{x}$ est le niveau de la variable dans l'état stationnaire déterministe.
- Nous mesurons les variables en déviations proportionnelles par rapport à leurs niveaux d'état stationnaire.

- Pour l'équation de l'évolution du stock de capital, on a

$$(1+n)(1+g)k_{t+1} = (1-\delta)k_t + s_t k_t^{(1-\alpha)} - c_t$$

$$\Rightarrow (1+n)(1+g)(k_{t+1} - \bar{k}) = (1-\delta)(k_t - \bar{k}) + (1-\alpha)\bar{s}\bar{k}^{-\alpha}(k_t - \bar{k})$$

$$+\bar{k}^{1-\alpha}(s_t - \bar{s}) - (c_t - \bar{c}) + A.T.$$

$$\Rightarrow (1+n)(1+g)\hat{k}_{t+1} = (1-\delta)\hat{k}_t$$

$$+(1-\alpha)\bar{s}\bar{k}^{-\alpha}\hat{k}_t + \bar{k}^{-\alpha}\bar{s}\hat{s}_t - \frac{\bar{c}}{\bar{k}}\hat{c}_t + A.T.$$

- De manière semblable, nous pouvons linéariser l'équation (19).

- Nous avons, après un peu d'algèbre:

$$\hat{c}_t = E_t\hat{c}_{t+1} + a_1\hat{k}_{t+1} + a_2\hat{s}_t + A.T. \tag{21}$$

$$\hat{k}_{t+1} = b_1\hat{k}_t + b_2\hat{s}_t + b_3\hat{c}_t + A.T. \tag{22}$$

$$\hat{s}_t = \rho\hat{s}_{t-1} + v_t + A.T. \tag{23}$$

- Nous pouvons écrire ce système sous forme matricielle de la manière suivante:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b_2 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{s}_t \\ \hat{k}_{t+1} \\ E_t\hat{c}_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{s}_{t-1} \\ \hat{k}_t \\ \hat{c}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_t \tag{24}$$

- Ce système est de la forme du système analysé par Ambler (2001), et à quelques petits changements près de la forme du système analysé par Farmer (1999, chapitre 3).

- Le premier document décrit en détail comment simuler numériquement ce type de système.

- Le deuxième met l'accent sur la distinction entre *équilibres réguliers* et *équilibres irréguliers*, où le nombre de racines caractéristiques stables du système dépasse le nombre de variables prédéterminées, ce qui donne la possibilité d'équilibres multiples et de taches solaires.

- Des raccourcis pour la linéarisation d'un système d'équations comme celui-ci sont indiqués par Uhlig (1999).

5 Attentes rationnelles et restrictions entre équations

- Paramètres de base du modèle: α, β, δ, θ, ρ, g, n.

- Paramètres du système d'équations linéaire: a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, ρ

- Paramètres pouvant être estimés par des équations auxiliaires: g (taux de croissance moyen de la productivité de la main-d'œuvre), n (taux de croissance moyen de l'emploi).

- Donc, les 6 paramètres du système d'équations linéaires sont une fonction de seulement 5 paramètres fondamentaux du modèle. Les attentes rationnelles imposent des restrictions (non linéaires) entre les valeurs des paramètres de notre système d'équations.

6 Théorèmes du bien-être

- Supposons l'existence d'un planificateur social qui maximise le bien-être du ménage représentatif, sujet seulement à la contrainte globale de ressources. Nous avons:

$$
\begin{aligned}
\max_{C_{t+i}\,,\,K^s_{t+1+i}\,,\,\lambda_{t+i}\,,\,\forall i \geq 0} \mathcal{L} = E_t \Bigg\{ \frac{{C_t}^{(1-\theta)}}{1-\theta} \frac{L_t}{H} \\
+\lambda_t \left(s_t (A_t L_t)^{\alpha} {K_t}^{(1-\alpha)} + (1-\delta) \frac{K_t}{H} - C_t \frac{L_t}{H} - \frac{K_{t+1}}{H} \right) \\
+\beta \frac{{C_{t+1}}^{(1-\theta)}}{1-\theta} \frac{L_{t+1}}{H} \\
+\beta \lambda_{t+1} \left(s_{t+1} (A_{t+1} L_{t+1})^{\alpha} {K_{t+1}}^{(1-\alpha)} + (1-\delta) \frac{K_{t+1}}{H} - C_{t+1} \frac{L_{t+1}}{H} - \frac{K_{t+2}}{H} \right) \\
+ \ldots \Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

- Les CPOs par rapport au choix de C_{t+i} et de K_{t+i+1} nous donnent:

$$
C_{t+i} : E_t \left[\beta^i {C_{t+i}}^{-\theta} \frac{L_{t+i}}{H} - \beta^i \lambda_{t+i} \frac{L_{t+i}}{H} \right] = 0, \quad \forall i,
$$

$$
K_{t+i+1} :
$$

$$
E_t \left\{ -\lambda_{t+i} + \beta \left(\lambda_{t+i+1} \left[(1-\delta) + s_{t+i+1} \left(K_{t+i+1} / (A_{t+i+1} L_{t+i+1}) \right)^{-\alpha} \right] \right) \right\}
$$

$$
= 0,
$$

- Une fois que l'on impose les conditions d'équilibre dans la version du modèle où on calcule explicitement l'équilibre concurrentiel, on obtient ces deux équations.

- Donc, les CPO du problème de planification social donnent *exactement* le même système d'équations que le système analysé précedemment, où nous avons calculé explicitement l'équilibre concurrentiel. Ceci montre que, sous certaines conditions, nous pouvons simplifier nos calculs en trouvant l'équilibre concurrentiel comme la solution à un problème de planificiation sociale.
- Conditions qui doivent être vérifiées afin de pouvoir calculer l'équilibre concurrentiel comme la solution à un problème de planification sociale:
    1. Concurrence parfaite.
    2. Absence d'externalités.
    3. Absence de distortions (par exemple des taxes distortionnaires).
    4. Dans un contexte d'incertitude, l'existence de marchés financiers complets au sens Arrow-Debreu.
- Si ces conditions sont vérifiées, l'utilisation d'un problème de planification sociale peut être un raccourci pour trouver l'équilibre concurrentiel.

7 Modèles à générations imbriquées

- Je suis la présentation dans le livre de Romer. La différence principale est que je continue à utiliser un taux d'escompte subjectif β et non un taux de préférence intertemporelle $1/(1+\rho)$.
- Postulats:

1. $L_{t+1} = (1+n)L_t$ comme auparavant. Dans cette section, on considère la maximisation par l'individu et non par le ménage.

2. $A_{t+1} = (1+g)A_t$ comme auparavant. Dans cette section, on considère seulement la croissance déterministe de la productivité et non les chocs technologiques.

3. Mêmes hypothèses concernant la production que dans le modèle avec agent représentatif.

4. Les individus ont un horizon de deux périodes. Voir Farmer (1999, section 6.8) sur une méthode pour réduire les modèles avec horizon de plus de 2 périodes à des modèles avec horizon de 2 périodes.

5. On suppose un taux de dépréciation de 100%, ce qui est relativement réaliste étant donné une longueur de période de 30 ans environ.

- Fonction d'utilité:

$$U_t = \frac{{C_{1t}}^{(1-\theta)}}{1-\theta} + \beta \frac{{C_{2t+1}}^{(1-\theta)}}{1-\theta}, \tag{26}$$

avec $\theta > 0$, $0 < \beta < 1$. La consommation en période 2 d'un individu est donnée par:

$$C_{2t+1} = (1 + r_{t+1})(w_t A_t - C_{1t}), \tag{27}$$

où w_t est le salaire *par unité de travail effectif.*

- La contrainte budgétaire intertemporelle est:

$$C_{1t} + \frac{1}{1 + r_{t+1}} C_{2t+1} = A_t w_t. \tag{28}$$

- Le Lagrangien du problème est:

$$\mathcal{L} = \frac{{C_{1t}}^{(1-\theta)}}{1-\theta} + \beta \frac{{C_{2t+1}}^{(1-\theta)}}{1-\theta} + \lambda \left[A_t w_t - C_{1t} - \frac{1}{1+r_{t+1}} C_{2t+1} \right] \quad (29)$$

- Les CPO sont:

$${C_{1t}}^{-\theta} - \lambda = 0, \quad (30)$$

$$\beta {C_{2t+1}}^{-\theta} = \frac{1}{1+r_{t+1}} {C_{1t}}^{-\theta}. \quad (31)$$

- Nous obtenons:

$$\frac{C_{2t+1}}{C_{1t}} = \left(\beta(1+r_{t+1})\right)^{1/\theta}. \quad (32)$$

- Substituant dans la contrainte budgétaire on obtient:

$$C_{1t} + \beta^{1/\theta} \left(1+r_{t+1}\right)^{(1-\theta)/\theta} C_{1t} = A_t w_t \quad (33)$$

$$\Rightarrow C_{1t} = \frac{1}{1+\beta^{1/\theta} \left(1+r_{t+1}\right)^{(1-\theta)/\theta}} A_t w_t. \quad (34)$$

- Définissons $s(r)$ la propension à épargner. Nous avons:

$$s(r_{t+1}) = \frac{\beta^{1/\theta} \left(1+r_{t+1}\right)^{(1-\theta)/\theta}}{1+\beta^{1/\theta} \left(1+r_{t+1}\right)^{(1-\theta)/\theta}}, \quad (35)$$

$$C_{1t} = \left[1 - s(r_{t+1})\right] A_t w_t. \quad (36)$$

- Nous avons:

$$\frac{\partial \left(1+r_{t+1}\right)^{(1-\theta)/\theta}}{\partial r_{t+1}} = \left[(1-\theta)/\theta\right] \left(1+r_{t+1}\right)^{(1-2\theta)/\theta}.$$

- Donc, s est croissant en r si $\theta > 1$ et décroissant en r si $\theta < 1$. Si $\theta = 1$ (préférences logarithmiques), la propension à épargner est indépendente de r.

7.1 Loi de mouvement de k

Nous avons:

$$K_{t+1} = s(r_{t+1}) L_t A_t w_t. \tag{37}$$

Divisons de chaque côté par $L_{t+1}A_{t+1}$. Nous avons:

$$k_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)} s(r_{t+1}) w_t. \tag{38}$$

Nous obtenons:

$$k_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)} s\left(f'(k_{t+1})\right)\left[f(k_t) - k_t f'(k_t)\right]. \tag{39}$$

Dans le cas de l'utilité logarithmique ($\theta = 1$) et fonction de production Cobb-Douglas nous avons:

$$k_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)} \frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha){k_t}^{\alpha} \equiv D{k_t}^{\alpha}. \tag{40}$$

Cette équation est l'équivalent de l'équation (2.61) dans le livre de Romer. Notez le changement de notation part rapport à la section sur le modèle de Ramsey: ici, α est la part du capital dans le revenu national. Nous obtenons le Graphique 2.11 du manuel de Romer. À long terme, nous avons:

$$k^* = D{k^*}^{\alpha} \Rightarrow k^* = D^{1/(1-\alpha)}. \tag{41}$$

Calculant une approximation du premier ordre de (40) nous avons:

$$k_{t+1} \approx k^* + \alpha D k^{*(\alpha-1)}(k_t - k^*) = \alpha(k_t - k^*). \tag{42}$$

Avec $\alpha = 1/3$, k comble $2/3$ de son écart par rapport à son niveau de long terme chaque période.

7.2 Dynamique dans le cas général

- Nous avons:

$$k_{t+1} = \Big[\frac{1}{(1+n)(1+g)}\Big]\Big[s\left(f'(k_{t+1})\right)\Big]\Big[\frac{[f(k_t) - k_t f'(k_t)]}{f(k_t)}\Big]\Big[f(k_t)\Big] \quad (43)$$

- De droite à gauche, les quatre termes représentent:

  1. la production par unité de travail effectif en t;
  2. la part de la production qui sert à rémunérer le travail;
  3. la part du revenu du travail qui est épargnée;
  4. ratio du travail effectif en t au travail effectif en $t+1$.

- Le Graphique 2.13 (livre de Romer) illustre quelques possibilités pour cette relation fonctionnelle entre k_t et k_{t+1}. On constate qu'il peut y avoir des équilibres multiples.

7.3 Inefficience dynamique

- Avec utilité logarithmique, fonction de production Cobb-Douglas et $g = 0$, nous avons sur le sentier de croissance équilibré:

$$k^* = \left[\frac{1}{(1+n)}\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha)\right]^{1/(1-\alpha)}. \quad (44)$$

- Donc, le produit marginal du capital sur le sentier de croissance équilibré est:

$$f'(k^*) = \alpha k^{*(\alpha-1)} = \frac{\alpha}{1-\alpha}(1+n)\frac{1+\beta}{\beta}. \quad (45)$$

- Le stock de capital de la règle d'or est défini par:

$$f'(k_{OR}) = (1 + n). \tag{46}$$

Ceci est tout simplement la quantité de capital qui maximise la consommation par travailleur à l'état stationnaire. On maximise:

$$f(k^*) - (1 + n)k^*,$$

nk^* étant le niveau d'investissement nécessaire pour garder le stock de capital par travailleur constant.

- Notez que dans le livre on a comme condition:

$$f'(k_{OR}) = n.$$

Il me semble qu'il y a une erreur. Ceci serait compatible avec un taux de dépréciation de 0%. On a en général:

$$C_{t+1} = f(k_t)A_tL_t - (1 - \delta)K_{t+1}$$

$$\Rightarrow c_{t+1} = f(k_t) - k_{t+1}(1 + n)(1 + g) + (1 - \delta)k_t.$$

À l'état stationnaire on a

$$c^* \approx f(k^*) - (n + g + \delta)k^*.$$

Avec $g = 0$ et $\delta = 1$, on a

$$c^* = f(k^*) - (1 + n)k^*.$$

- En principe, k^* peut être supérieur ou inférieur à k_{OR}. Si $k^* > k_{OR}$, nous pouvons améliorer la consommation de tout le monde (voir le Graphique 2.14 dans le livre de Romer). Le nombre infini de générations fournit au *planificateur* une façon d'attribuer aux personnes agées plus de consommation que le marché n'a pas. Les individus, pour consommer dans leur vieillesse, doivent épargner, même si le taux de rendement sur le capital est très faible.

7.4 Secteur public dans le modèle avec générations imbriquées

- Si les dépenses sont financées par impôt forfaitaire, nous avons (cas d'utilité logarithmique et fonction de produciton Cobb-Douglas):

$$k_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)} \frac{\beta}{1+\beta} \left[(1-\alpha) {k_t}^{\alpha} - G_t \right]. \qquad (47)$$

- Nous pouvons analyser graphiquement l'impact de changements de G_t en utilisant le graphique 2.15.

7.4.1 Effets des dépenses publiques

- Les dépenses agissent comme un choc technologique *additif* négatif.

7.4.2 Financement des dépenses

- Nous avons:

$$k_{t+1} + b_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)} \frac{\beta}{1+\beta} \left[(1-\alpha) {k_t}^{\alpha} - T_t \right]. \qquad (48)$$

- En réduisant les impôts, la consommation augmente et l'accumulation du capital diminue.

Références

Ambler, Steve (2001), "Notes on the Forward-Backward Simulation Method" `http://er.uqam.ca/nobel/r10735/forbackd.pdf`

Farmer, Roger (1999), *Macroeconomics of Self-Fulfilling Prophecies*. 2e édition, Cambridge, MA, MIT Press

Romer, David (2000), *Advanced Macroeconomics*. 2e édition, McGraw Hill

Romer, David (1996), *Macroéconomie approfondie*. Édiscience-McGraw Hill

Uhlig, Harald (1999), "A toolkit for analysing nonlinear dynamic stochastic models easily", in Ramon Marimon and Andrew Scott, eds, *Computational Methods for the Study of Dynamic Economies* Oxford University Press, Oxford, 30-61.

Annexe A

- Nous dérivons dans cette section le système de deux équations que nous utilisons pour l'analyse graphique du modèle de croissance de base.

- Substituant les multiplicateurs de Lagrange de l'équation (15), et laissant tomber les opérateurs d'espérance, nous pouvons écrire:

$$\frac{C_t{}^{-\theta}}{C_{t+1}{}^{-\theta}} = \beta \left[(1-\delta) + (1-\alpha)\left(A_{t+1}L_{t+1}\right)^{\alpha} K_{t+1}{}^{-\alpha} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{(C_t/A_t)^{-\theta}}{(C_{t+1}/(A_{t+1}/(1+g)))^{-\theta}} = \beta\left[(1-\delta)+(1-\alpha){k_{t+1}}^{-\alpha}\right]$$

$$\Rightarrow -\theta\ln(C_t)+\theta\ln(C_{t+1})+\theta g = \ln\beta+\ln\left((1-\delta)+(1-\alpha){k_{t+1}}^{-\alpha}\right)$$

$$\Rightarrow \ln(C_{t+1})-\ln(C_t) = \frac{\ln\beta+\ln\left((1-\delta)+(1-\alpha){k_{t+1}}^{-\alpha}\right)-\theta g}{\theta}$$

- À partir de la loi de mouvement du capital et la contrainte de ressources, nous avons:

$$Y_t = C_t L_t + K_{t+1} - (1-\delta)K_t$$

$$\Rightarrow \frac{Y_t}{A_t L_t} = \frac{C_t}{A_t} + \frac{K_{t+1}}{A_t L_t} - (1-\delta)\frac{K_t}{A_t L_t}$$

$$\Rightarrow {k_t}^{(1-\alpha)} = c_t + k_{t+1}\frac{A_{t+1}L_{t+1}}{A_t L_t} - (1-\delta)k_t$$

$$\Rightarrow k_{t+1}-k_t = k_t^{(1-\alpha)} - \delta k_t - (n+g)k_{t+1} - c_t,$$

où nous avons utilisé $ng \approx 0$ si n et g sont assez petits.

cette version: **10/02/2003**: corrections mineures