Le Modèle de Croissance de Solow [*]

Steve Ambler
Département des sciences économiques
École des sciences de la gestion
Université du Québec à Montréal

Automne 2008

Table des matières

[*] Je travaille de façon continue sur ces notes. J'aimerais recevoir vos commentaires. Pour signaler des coquilles ou pour suggérer des améliorations, veuillez m'envoyer un courriel à ambler.steven@uqam.ca.

1 Introduction

1.1 Mots clés

– Les faits stylisés de Kaldor

– Rendements d'échelle constant

– Rendements marginaux décroissants

- La fonction de production Cobb-Douglas
- La forme intensive de la fonction de production
- Le sentier de croissance équilibrée
- La convergence
- La comptabilité de croissance
- Le résidu de Solow
- La croissance endogène
- La recherche et le développement
- La non-rivalité et l'exclusivité
- Learning-by-doing
- Le capital humain
- L'infrastructure sociale
- L'externalité
- Rent-seeking

1.2 Importance de la croissance économique

- Amélioration impressionante du niveau de vie (dans les pays industrialisés) depuis la Révolution industrielle.
- Lucas (1987) : augmenter le taux de croissance moyen par un point de pourcentage auraient beaucoup plus d'impact sur le bien-être que l'élimination complète des fluctuations économiques.
- L'article de Lucas (1987) a fait coulé énormément d'encre (comme d'ailleurs plusieurs articles de Lucas). On n'a pas le temps de se pencher sur la

controverse suscitée par cet article, mais la lecture en vaut la peine.

2 Faits

- Y/L 10 à 30 fois plus élevé maintenant qu'il y a 100 ans.
- Y/L 50 à 300 fois plus élevé maintenant qu'il y a 200 ans.
- Ralentissement du taux de croissance depuis 1970 dans les pays industrialisés.
- Reprise vers la fin des années 90 ?
- Différences énormes entre les niveaux de Y/L dans différents pays.
- "Miracles" de croissance : Japon depuis 1945 ; Corée du Sud, Taïwan, Singapour, Hong Kong entre 1960 et 1990.
- "Désastres" de la croissance : Argentine, Afrique sub-saharienne.
- Faits stylisés de la croissance selon Kaldor (1961).
  1. Y/L augmente et son taux de croissance ne semble pas diminuer.
  2. K/L augmente.
  3. Le taux de rendement du capital est stable.
  4. K/Y est stable.
  5. L et K reçoivent des parts stables du revenu total.
  6. Les taux de croissance de Y/L sont très différents entre pays.

3 Modèle de base de Solow

- Compatible avec certains des faits stylisés de Kaldor.

- Conclusion principale : l'accumulation du capital physique **ne peut** expliquer 1) la croissance du revenu par tête à travers le temps ; 2) les écarts de revenu entre pays.
- Fonction de production agrégée :

$$Y(t) = F\left(K(t)\,,\; A(t)L(t)\right).$$

- En principe, toutes les variables du modèle de base sont des fonctions du temps. Lorsqu'il n'y a pas d'amiguïté, nous laisserons tomber l'argument de ces fonctions.
- Hypothèse de rendements constants à l'échelle :

$$F(cK\ ,\ cAL) = c\,F(K\ ,\ AL) \quad \forall c \geq 0.$$

- Par conséquent, nous pouvons écrire la fonction de production agrégée sous **forme intensive** :

$$c = 1/(AL) \Rightarrow Y/(AL) = F\left(\frac{K}{AL}\,,\,1\right)$$

- Nous pouvons écrire cette équation moyennant une notation plus compacte :

$$y = f(k),$$

  où $y \equiv Y/(AL)$ et $k \equiv K/(AL)$.

– Voir le Graphique 1.1 du manuel.

– Dans le cas d'une fonction Cobb-Douglas, on a (exercice) :

$$Y = K^{\alpha} \left(A\,L\right)^{1-\alpha} \Rightarrow y = k^{\alpha}$$

3.1 Hypothèses concernant l'évolution des inputs

1. $\dot{L} = n\,L$

2. $\dot{A} = g\,A$

3. $\dot{K} = I - \delta\,K = s\,Y - \delta\,K$

où s est le taux d'épargne, δ est le taux de dépréciation, et où pour une variable X quelconque :

$$\dot{X} \equiv \frac{\partial X}{\partial t}$$

3.2 Hypothèses sur le comportement des individus

1. Le taux d'épargne s est une constante exogène dans l'analyse.

3.3 Évolution de k

$$
\begin{aligned}
\dot{k} &= \left(\dot{\frac{K}{LA}}\right) \\
&= \frac{\dot{K}}{LA} - \frac{K}{(AL)^2}\left(A\dot{L} + \dot{A}L\right) \\
&= \frac{\dot{K}}{LA} - \frac{K}{LA}\frac{\dot{L}}{L} - \frac{K}{LA}\frac{\dot{A}}{A} \\
&= \frac{s\,Y - \delta\,K}{LA} - k\,n - k\,g \\
&= s\frac{Y}{AL} - \delta\,k - n\,k - g\,k \\
\Rightarrow \dot{k} &= s\,f(k) - (n + g + \delta)\,k.
\end{aligned}
$$

- Dans la première ligne de cette suite d'égalités, le point sur $\left(\frac{K}{LA}\right)$ s'applique à tout le contenu de la parenthèse. Donc, il s'agit du taux de changement du ratio.
- Le premier terme à droite de l'égalité est l'épargne qui est égale à l'investissement brut dans une économie fermée.
- Le deuxième terme à droite a l'interprétation de l'investissement nécessaire pour maintenir un stock de capital par travailleur effectif constant, pour :
  1. remplacer le capital qui se déprécie ;
  2. fournir du capital aux nouveaux travailleurs sur le marché ;
  3. fournir du capital additionnel aux travailleurs qui deviennent plus productifs.

- Voir le Graphique 1.2 du manuel.
- Il y a une seule variable dynamique ici (k). On peut représenter la dynamique de cette variable par un “diagramme de phase”.
- Voir le Graphique 1.3 du manuel.

3.4 Sentier de croissance équilibrée

- À long terme, et en l’absence de chocs aux paramètres exogènes du modèle, il faut que :

$$\dot{k} = 0 \Rightarrow k = k^*.$$

  Nous utilisons une astérisque pour dénoter que la valeur du stock de capital prend sa valeur du sentier de croissance équilibrée.
- Nous obtenons avec des manipulations algébriques :

$$\begin{aligned}
K &= A\,L\,k \\
\Rightarrow \dot{K} &= \dot{A}\,L\,k + A\,\dot{L}k + A\,L\,\dot{k} \\
&= \dot{A}\,L\,k + A\,\dot{L}k \\
\Rightarrow \frac{\dot{K}}{K} &= \frac{\dot{A}}{A}\,\frac{AL}{K}\,k + \frac{\dot{L}}{L}\,\frac{AL}{K}\,k = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{L}}{L} \\
\Rightarrow \frac{\dot{K}}{K} &= n + g \\
\Rightarrow \frac{\dot{Y}}{Y} &= n + g
\end{aligned}$$

- Y/L, K/L augmentent au taux g (exercice).
- Conséquence : le taux de croissance du revenu par tête dépend uniquement de

g.

– Si on regarde les faits stylisés de Kaldor, on constate que :

1. K/Y est constant ;
2. K/L augmente ;
3. Y/L augmente.

– Nous parlons de **croissance équilibrée** puisque les agrégats (Y, C, K, I) augmentent au même taux de croissance ($n + g$), et les agrégats par travailleur effectif (y, c, k, i) augmentent au même taux de croissance (g).

4 Impact d'une modification du taux d'épargne

– Voir le Graphique 1.4 du manuel.
– Voir le Graphique 1.5 du manuel.

5 Impact sur la consommation

– Voir le Graphique 1.6 du manuel.
– Il y a un taux d'épargne qui maximise c (C/AL) à l'état stationnaire.
– **Règle d'or de la croissance** : si on commence avec un niveau de k en dessous du niveau compatible avec la règle d'or, il faut sacrifier de la consommation à court terme afin d'atteindre le niveau de la règle d'or.
– À cause de cela, dans un modèle avec optimisation intertemporelle (voir le chapitre 2 de Romer si vous êtes intéressés), la règle d'or n'est pas vraiment

optimale. C'est parce que le sacrifice a lieu à court terme et les bénéfices (un niveau plus élevé de consommation) sont récupérés plus tard. C'est seulement si le taux d'escompte subjectif de l'agent représentatif est zéro que ça vaut la peine d'atteindre le niveau de c compatible avec la règle d'or. Sinon, le niveau optimal de c est moins élevé, et nous parlons de la **règle d'or modifiée**.

6 Conséquences quantitatives

6.1 Impact de l'épargne sur la production à long terme

– Le stock de capital de long terme est une fonction des paramètres exogènes du modèle :

$$k^* = k^*(s\,,\,n\,,\,g\,,\,\delta)$$

– L'impact d'une modification du taux d'épargne s sur l'output y à long terme est donné par :

$$\frac{\partial y^*}{\partial s} = f'(k^*)\frac{\partial k^*(s\,,\,n\,,\,g\,,\,\delta)}{\partial s}.$$

– Nous devons évaluer $\partial k^*/\partial s$.

– k^* satisfait :

$$\begin{aligned} s\,f(k^*(s\,,\,n\,,\,g\,,\,\delta)) &= (n+g+\delta)k^*(s\,,\,n\,,\,g\,,\,\delta) \\ \Rightarrow s\,f'(k^*(s\,,\,n\,,\,g\,,\,\delta))\frac{\partial k^*}{\partial s} + f(k^*) &= (n+g+\delta)\frac{\partial k^*}{\partial s} \\ \Rightarrow \frac{\partial k^*}{\partial s} &= \frac{f(k^*)}{(n+g+\delta) - sf'(k^*)}. \end{aligned}$$

– Substituant dans l'équation pour $\partial k^*/\partial s$, nous obtenons :

$$\frac{\partial y^*}{\partial s} = f'(k^*)\frac{f(k^*)}{(n+g+\delta) - sf'(k^*)}$$

– Nous voulons convertir en **élasticité**.

$$\begin{aligned}\frac{\partial y^*}{\partial s}\frac{s}{y^*} &= \frac{s}{f(k^*)}f'(k^*)\frac{f(k^*)}{(n+g+\delta) - sf'(k^*)} \\ &= \frac{f'(k^*)}{f(k^*)}\frac{sf(k^*)}{(n+g+\delta) - sf'(k^*)}\end{aligned}$$

– Nous utilisons maintentant le fait que $s\,f(k^*) = (n+g+\delta)k^*$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial y^*}{\partial s}\frac{s}{y^*} &= \frac{f'(k^*)\,(n+g+\delta)\,k^*}{f(k^*)\,[(n+g+\delta) - (n+g+\delta)k^* f'(k^*)/f(k^*)]} \\ &= \frac{k^* f'(k^*)/f(k^*)}{1 - k^* f'(k^*)/f(k^*)} \\ &\equiv \frac{\alpha_K(k^*)}{1-\alpha_K(k^*)}\end{aligned}$$

– En concurrence parfaite, le capital reçoit son produit marginal.

– Donc, α_K est la part du capital dans le revenu national.

– Dans les données, nous avons $\alpha_K \approx 1/3$.

– Ceci nous donne :

$$\frac{\alpha_K(k^*)}{1-\alpha_K(k^*)} \approx \frac{1}{2}$$

– De fortes variations du taux d'épargne conduisent à des effets modérés ou faibles sur le niveau de production par travailleur effectif.

– Supposon un s initial de 0.20 et une augmentation de 10% du taux d'épargne, qui passe donc de 0.20 à 0.22. On a $\partial s/s = 0.10$ et donc $\partial y/y = 0.05$, une augmentation de 5% du PIB.

6.2 La vitesse de convergence

– Une expansion de Taylor d'ordre 1 autour du point $k = k^*$ nous donne :

$$\dot{k} \approx \left[\frac{\partial \dot{k}(k)}{\partial k} \mid_{k=k^*}\right](k - k^*) .$$

Nous écrivons ici seulement le terme du premier ordre, le terme d'ordre zéro étant égal à zéro.

– Nous avons :

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial \dot{k}(k)}{\partial k} \mid_{k=k^*}\right] &= sf'(k^*) - (n+g+\delta) \\
&= \frac{(n+g+\delta)\,k^*}{f(k^*)} f'(k^*) - (n+g+\delta) \\
&= \left(\frac{k^*}{f(k^*)} f'(k^*) - 1\right)(n+g+\delta) \\
&= [\alpha_K - 1]\ (n+g+\delta) \\
\Rightarrow \dot{k} &\approx [\alpha_K - 1]\ (n+g+\delta)\ (k-k^*)
\end{aligned}$$

– Le capital effectif converge vers k^* à un taux proportionnel à l'écart entre k et k^*.

– Imposons les valeurs numériques raisonnables suivantes : n 1-2%, g 1-2%, δ

3-4%. Nous obtenons

$$(n+g+\delta) \approx .06 \Rightarrow (1-\alpha_K)(n+g+\delta) \approx .04.$$

– Donc, environ 4% de l'écart entre k et k^* est rattrapé chaque année.
– Donc ça prend environ 18 ans pour rattraper la moitié de l'écart. Ceci est une vitesse de convergence très lente.

7 Problèmes soulevés par le modèle

– Peut-on expliquer les écarts observés de PIB par tête ?
– Le PIB par habitant au Canada est environ 10 fois celui de l'Inde.

$$\frac{y_1}{y_2} = 10$$

$$\Rightarrow \frac{{k_1}^{\alpha_k}}{{k_2}^{\alpha_k}} = 10$$

$$\Rightarrow \frac{k_1}{k_2} = 10^{1/\alpha_K} \approx 10^3 = 1000$$

– Pourtant, le stock de capital par habitant au Canada est environ 10 plus éleve que celui de l'Inde.
– Conclusion : les différences entre les PIB par habitant doivent être expliquées par A.
– Ceci n'est pas vraiment une **explication** au sens scientifique du terme.
– On finit par expliquer la croissance par le facteur exogène dans le modèle.
– Ceci explique en bonne partie le développement, durant les années 90, de la

nouvelle théorie de la croissance ou de la **croissance endogène**.

8 Applications empiriques

8.1 Comptabilité de la croissance

– Voir Solow (1957), Abramovitz (1956). Nous avons

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= \frac{\partial Y}{\partial K}\dot{K} + \frac{\partial Y}{\partial L}\dot{L} + \frac{\partial Y}{\partial A}\dot{A} \\ \Rightarrow \frac{\dot{Y}}{Y} &= \frac{K}{Y}\frac{\partial Y}{\partial K}\frac{\dot{K}}{K} + \frac{L}{Y}\frac{\partial Y}{\partial L}\frac{\dot{L}}{L} + \frac{A}{Y}\frac{\partial Y}{\partial A}\frac{\dot{A}}{A} \\ &\equiv \alpha_K\frac{\dot{K}}{K} + \alpha_L\frac{\dot{L}}{L} + R \end{aligned}$$

– En concurrence parfaite on a $\alpha_K + \alpha_L = 1$, ce qui nous donne

$$\frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{L}}{L} = \alpha_K\left[\frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L}\right] + R.$$

– R est le **résidu de Solow**.

– Le résidu de Solow est encore utilisé par des statisticiens et par les économistes. Il est au fond du modèle de cycles réels (RBC) de base (voir le chapitre 4 du manuel).

8.2 Convergence

– Les écarts de revenu auraient tendance à disparaître pour trois raisons :

1. convergence vers le sentier d'équilibre ;
2. flux de capitaux vers les pays pauvres ;
3. la diffusion des connaissances ferait converger les A.

– Évidence de Baumol (1986). Données pour 16 pays industrialisés.
– Japon, Suède, Finlande, Norvège, Allemagne, Canada, Autriche, France, Italie, Pays bas, États-Unis, Danemark, Suisse, Belgique, Royaume Uni, Australie.
– Il obtient les résultats d'estimation suivants :

$$\ln\left[\left(\frac{Y}{L}\right)_{i,1979}\right] - \ln\left[\left(\frac{Y}{L}\right)_{i,1870}\right] = 8.457 - 0.995 \ln\left[\left(\frac{Y}{L}\right)_{i,1870}\right],$$

– $R^2 = 0.87$; écart type associé au coefficient -0.995 – 0.094.
– Critique de DeLong (1988) :

1. Biais de sélection : les pays pauvres en 1870 sont dans l'échantillon **seulement** s'ils ont eu un taux de croissance élevé depuis.
2. Erreur de mesure : Surestimer le *niveau* du revenu en 1870 revient à sousestimer le taux de croissance. Donc, la présence de l'erreur de mesure favorise l'hypothèse nulle qui est testée.

– Pour calculer l'impact de l'erreur de mesure, on a besoin d'un modèle statistique et des hypothèses sur la taille de l'erreur.

- Modèle statistique de DeLong :

$$\begin{aligned}
\ln\left[\left(\frac{Y}{L}\right)_{i,1979}\right] - \ln\left[\left(\frac{Y}{L}\right)_{i,1870}\right]^{*} &= a - b\ln\left[\left(\frac{Y}{L}\right)_{i,1870}\right]^{*} + \varepsilon_i, \\
\ln\left[\left(\frac{Y}{L}\right)_{i,1870}\right] &= \ln\left[\left(\frac{Y}{L}\right)_{i,1870}\right]^{*} + u_i, \\
\mathrm{Corr}(\varepsilon_i\, ,\, u_i) &= 0.
\end{aligned}$$

- DeLong ajoute 7 pays à l'échantillon de Baumol pour créer un échantillon plus représentatif (Argentine, Chili, Allemagne de l'Est, Ireland, Nouvelle Zélande, Portugal, Espagne), et il élimine le Japon.
- On ne peut pas identifier la corrélation entre les termes d'erreur à partir des données. Il faut faire une hypothèse a priori là-dessus.
- Si $\sigma_u = 0.15$, on obtient $\hat{b} = 0$ (pas de convergence), et si $\sigma_u = 0.20$, on obtient $\hat{b} = 1$ (divergence).
- Donc, pour des valeurs raisonnables pour la taille de l'erreur de mesure, il n'y a plus de convergence.
- Graphique 1.9, pour un grand échantillon de pays et des données de 1960 à 1989.
- Variables omises de la régression : variables de politique économique, d'éducation, etc.
- Mankiw, Romer et Weil (1992) ont rajouté le **capital humain** au modèle de croissance et ont obtenu des résultats empiriques encourageants. Voir le chapitre trois du manuel pour plus de détails.

9 Environnement et croissance

À lire dans le manuel, mais je ne poserai pas de question directe sur ce sujet à l'examen.

Cette version : **11/08/2008**