Les modèles du cycle réel

Steve Ambler
Département des sciences économiques
École des sciences de la gestion
Université du Québec à Montréal

Automne 2005

Contents

1 Introduction

L'objectif de cette partie du cours sera d'étudier l'historique du dveloppement de l'approche de cycle réels (ou *RBC* – Real Business Cycles), et d'étudier en détail un modèle simplifié qui ressemble à quelques différences près au modèle élaboré dans l'article classique de Kydland et Prescott (1982).

Différences de ce texte par rapport au texte de King et Rebelo (2000).

1. King et Rebelo mettent l'accent sur une faiblesse particulière de la première génération des modèles RBC: la taille des chocs technologiques nécessaire pour reproduire la variabilité observée de l'output et des autres agrégats macroéconomiques. Si on calibre (étalonne) le processus stochastique engendrant les chocs de façon à pouvoir expliquer cette variabilité, la probabilité que l'économie subisse un choc technologique négatif devient relativement élevée. Cette possibilité de regrès technique ("technological regress") ne semble pas très plausible.

2. Je mets l'accent ici sur une autre faiblesse des modles RBC de premire gnration: leur difficult reproduire certains faits styliss du march du travail, notamment la corrlation faible dans les donnes entre la productivit de la main-d'œuvre (ou le salaire rel) et l'emploi.

3. King et Rebelo parlent de la critique de Cogley et Nason (1995), mais ils ne relient pas cette critique la faon de stationnariser les donnes, et le fait que les filtres Hodrick-Prescott ou bandpass puissent introduire des "autocorrlations fictives" dans les sries macroconomiques.

2 Importance de la tendance dans les modles du cycle rel

- On s'intéresse aux propriétés cycliques des modèles et des données, donc la *stationnarit* est extrmement importante.

- Pour viter les problmes de *corrlations fictives*, lorsqu'on calcule les proprits de sries chronologiques macroconomiques, il faut qu'elles soient stationnaires.

- Par contre, on constate que la plupart des sries macroconomiques ne sont pas stationnaires.

- Il faut extirper la tendance. La mthodologie utilise peut avoir des consquences trs importantes pour les proprits de la composante cyclique.

- Par exemple, le fait d'extirper une tendance en appliquant un filtre Hodrick-Prescott ou en calculant une srie en taux de croissance peut affecter la *persistance* de la srie (mesure, par exemple, par sa fonction d'autocorrlation). Si on s'intresse au comportement dynamique conjoint de deux ou de plusieurs sries, le fait d'utiliser le filtre HP ou de calculer en taux de croissance peut influencer la relation dynamique entre les séries, mesurée par exemple par le calcul de coefficients de corrélation décalés enre deux séries différentes.

La nature et l'origine de la tendance cyclique peuvent affecter la manire de tester ou d'valuer nos modles du cycle conomique. Un exemple trs simple serait la section 4.8 du manuel de Romer. L'argument qu'on retrouve dans cette section est la suivante:

- Les modles RBC accordent une grande importance au rle de chocs technologiques.

- Les chocs technologiques ont un impact sur les agrgats macroconomiques qui a une forte composante permanente. Les chocs de demande agrge, qui ont une place centrale dans d'autres approches au cycle (par exemple l'approche keynsienne), ont un impact temporaire.

- Pour cette raison, une faon d'valuer la capacit des modles RBC d'expliquer le cycle est de mesurer l'importance de la composante permanente des fluctuations du PIB.

On peut faire ressortir le problme avec ce raisonnement avec un contre-exemple. Stadler (1990) construit un modle de croissance endogne o le taux de progrs technique est alatoire et dpend de l'allocation des ressources. Le modle contient aussi des rigidits nominales, et pour cette raison les chocs de demande agrge en gnral et montaires en particuliers ont un impact sur l'allocation des ressources court terme et donc sur le taux de progrs technique. Donc, dans ce modle *tous* les types de chocs, y compris les chocs montaires, peuvent avoir un effet *permanent* sur les agrgats macroconomiques. Tester l'importance de la composante permanente du PIB n'est pas forcment une bonne faon de discriminer entre les approches du cycle (mis part la difficult souligne par Romer de dceler l'importance de la composante permanente d'une srie l'aide d'un chantillon fini de donnes).

La nature de la tendance est aussi importante pour certains aspects de la modlisation. Par exemple, si on veut rsoudre et simuler un modle avec des techniques de programmation dynamique, il faut stationnariser les problmes de maximisation afin de pouvoir invoquer les thormes relis aux techniques du "stationary discounted dynamic programming". Une raison de plus pour utiliser des techniques lagrangiennes: avec les techniques lagrangiennes, nous pouvons procder de faon un peu moins rigoureuse en crivant les problmes de maximisation avec les variables non normalises et en applicant les normalisations appropries aux CPOs.

Considrez les deux mthodologies suivantes pour l'laboration et l'valuation d'un modle du cycle conomique.

1. Construire un modle thorique uniquement de la composante cyclique des sries macroconomiques. Engendrer les prdictions du modle, possiblement l'aide de techniques de simulation numrique. Les sries ainsi engendrer sont par construction stationnaires puisqu'on modlise seulement la composante cyclique des sries. Utiliser une mthodologie standard pour extirper les tendances des agrgats dans les donnes.[1] Comparer les prdictions du modle avec ce qu'on observe dans les donnes.

2. Rflchir srieusement la nature de la non-stationnarit dans les donnes. Si on pense, par exemple, que la R&D est sujette des alas importants, il devient difficile d'chapper la conclusion que la tendance dans le PIB est une tendance stochastique. Ceci va aussi restreindre le choix de comment extirper la tendance des donnes. Construire un modle thorique qui reflte

[1] Ceci est une raison qui explique la popularit du filtre HP, puisqu'il stationnarise toutes les sries non stationnaires jusqu' I(4) (cela veut dire des sries intgres d'ordre quatre, dont les quatrimes diffrences sont engendres par des processus stochastiques stationnaires). Voir King et Rebelo (1990) pour une preuve.

nos hypothses concernant la nature de la non-stationnarit. Extirper la tendance des sries dans les vraies donnes et dans les donnes artificielles (celles engendres par des simulations numrique du modle) *de la mme faon* avant de comparer les prdictions du modle avec les faits.

3. Ceci veut dire que notre valuation du modle du cycle conomique repose sur nos hypothses concernant la ou les sources de la non-stationnarit, mais de cette faon nous jouons avec toutes les cartes sur la table.

3 Faits styliss du cycle en conomie ferme

3.1 Variabilits, variabilits relatives

- Voir Tableau 1.1, Tableau 5.1 dans Cooley (1995), Phaneuf (1994), Stock et Watson (1990), Stadler (1994), ou King et Rebelo (2000).

3.2 Corrlations contemporaines

- Voir encore Tableau 1.1, Tableau 5.1 dans Cooley (1995), Phaneuf (1994), Stock et Watson (1990), Stadler (1994), ou King et Rebelo (2000).

3.3 Aspects dynamiques: autocorrélations et corrlations dcales

- Voir encore Tableau 1.1, Tableau 5.1 dans Cooley (1995), Phaneuf (1994), Cogley et Nason (1995), Stock et Watson (1990), Stadler (1994) ou King et Rebelo (2000).

4 La critique de Cogley et Nason (1995)

- Cogley et Nason font ressortir les effets du filtre H-P sur le comportement dynamique des sries. L'application du filtre a tendance a accentuer les autocorrlations des sries filtres et donc exagrer la persistance de ces sries. Voir aussi Guay et StAmant (1997).

- Ils reprennent un certain nombre de modles de la littrature et montrent que, lorsque les sries sont mesures en taux de croissance, aucun des modles ne contient des mcanismes de propagation dynamique qui permettraient d'expliquer 1) l'autocorrlation du taux de croissance du PIB et 2) la rponse en forme de bosse des sries comme le PIB des chocs temporaires.

- La persistance dans les modles RBC vient presqu'uniquement de la persistance des chocs. Les mcanismes de propagation dynamique *endognes* de ces modles sont inadquats pour expliquer la persistance observe des sries macroconomiques.

4.1 Vers une nouvelle synthse?

- Mon jugement personnel est qu'il est difficile de répondre à la critique de Cogley et Nason est d'introduire des rigidités nominales (soit de prix, soit de salaires, soit les deux) dans les modèles.

- En fait, un nombre croissant de chercheurs incorporent des rigidités nominales dans les modèles qui utilisent la même approche de base du modèle RBC de base (spécification explicite des préférences et de la technologie, maximisation par tous les agents dans le modèle, sauf éventuellement les gouvernements, etc.). On parle même d'une nouvelle synthèse néoclassique en théorie macroéconomique ou de la "nouvelle macroéconomie néoclassique" (baptisée "New Neoclassical Synthesis" par Goodfriend et King, 1997). Pour un exemple récent appliqué à l'analyse de la politique monétaire optimale, voir Amato et Laubach (1999). Voir aussi Erceg, Henderson et Levin (2000), Goodfriend et King (1997) et Rotemberg et Woodford (1997).

- Voir Danthine (1998) pour un bon survol en langue française.

- Ces modèles ne sont pas sans difficultés au plan théorique. Par exemple, Chari, Kehoe et McGrattan (2000) montrent que le degré requis de rigidité de prix pour répondre à la critique de Cogley et Nason n'est pas plausible. Ceci veut dire que le nombre de périodes pendant lesquelles le prix d'une firme donné n'est pas changé est trop élevé pour être compatible avec l'évidence empirique. Si par contre les firmes gardent leurs prix constants pendant une période plus courte,

- Huang et Liu (2002) ont montré récemment que des modèles incorporant un degré plausible de rigidité *salariale* peuvent engendrer sufissamment de persistance pour répondre à la critique de Cogley et Nason. Donc, cette voie semble être prometteuse. Ambler (2002) a montré aussi que les rigidités nominales salariales peuvent être un équilibre de Nash dans un modèle où l'on introduit des coûts fixes pour ajuster les salaires.

4.2 La recrudescence de techniques conomtriques et les modles du cycle conomique

- Dans le modèle de base, il y a relativement peu de paramètres libres à calibrer (étalonner). On peut relativement facilement les étalonner sur la base d'évidence microéconomique ou sur la base de données venant de la comptabilité nationale.[2]

- Dans les extensions du modèle de base, on a tendance à introduire de plus en plus de paramètres libres, qui sont moins faciles à étalonner sur la base d'évidence microéconomique.

- On a aussi tendu l'ensemble de faits styliss utiliss pour valuer les modles.

[2] Par exemple, le coefficient associé à l'input travail dans une fonction de production agrégée Cobb-Douglas doit être égal en concurrence parfaite à la part du revenu du travail dans le revenu national. On peut donc étalonner ce paramètre sur la base de données sur le revenu national.

Cela ncessite une mthodologie plus formelle pour mesurer la “distance” entre les prdictions du modle et les faits observs.

- Les premiers exemples de l’utilisation de techniques économétriques pour estimer les modèles RBC sont Altug (1989) et Christiano et Eichenbaum (1992). Les exemples d’articles publis se multiplient. Pour des exemples, voir Ambler, Guay et Phaneuf (1999), Rotemberg et Woodford (1997), Goodfriend et King (1997), Ireland (2001, 2002).

5 Modle de base

5.1 Prfrences et contraintes

Fonction d’utilit de l’agent reprsentatif:

$$U = E_t \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \left\{ \ln(c_{t+i}) - \frac{\chi}{1+\psi} {l_{t+i}}^{1+\psi} \right\}.$$

J’ai choisi cette forme puisqu’elle est compatible avec la croissance quilibre et il permet d’obtenir des solutions particulirement simples cause de la sparabilit entre la consommation et le travail. Cette forme fonctionnelle va nous permettre d’isoler l_t en fonction des autres variables et de l’liminer par substitution.

Fonction de production agrge:

$$y_t = {k_t}^{\alpha} \left(z_t l_t \right)^{(1-\alpha)}.$$

Contrainte de ressources globale:

$$y_t = c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t + g_t.$$

Sous certaines conditions, ces trois quations vont suffir (part la spcification des processus qui engendrent les variables exognes z_t et g_t.

5.2 Processus stochastiques

Choc technologique persistant et stationnaire:

$$\ln(z_t) = (1-\rho_z)\ln(z) + \rho_z \ln(z_{t-1}) + \varepsilon_{zt}$$

avec $\varepsilon_{zt} \sim N(0, \sigma_z^2)$.

Choc technologique suivant une tendance dterministe:

$$\ln(z_t) = \ln(z) + gt + u_{zt}$$

avec

$$u_{zt} = \rho_u u_{zt-1} + \varepsilon_{zt}.$$

Choc technologique suivant une tendance stochastique avec drive:

$$\ln(z_t) = g + \ln(z_{t-1}) + u_{zt}.$$

Il faut que les dpenses publiques ait la mme tendance que l'output. Sinon, la croissance quilibre ne sera pas possible et il n'y aura pas un tat stationnaire dterministe. Nous pouvons supposer:

$$(g_t/z_t) = (1 - \rho_g)\ln(g) + \rho_g \ln(g_{t-1}/z_{t-1}) + \varepsilon_{gt}$$

avec $\varepsilon_{gt} \sim N(0, \sigma_g^2)$. Un problme potentiel est que les dpenses publiques dpendent de la valeur courante du choc technologique z_t. De cette faon, l'innovation ε_{zt} affecte le niveau des dpenses publiques et donc les chocs seront corrles. Nous ignorons ce problme.

5.3 Problme de planification sociale

Ce que nous cherchons est un quilibre concurrentiel. Sous certaines conditions cet quilibre sera un optimum au sens de Pareto est nous pouvons trouver l'quilibre par le biais d'un **raccourci** — l'quivalence entre l'quilibre concurrentiel et la solution un problme de plancification sociale appropri. La meilleure explication dtaille de cette dmarche se trouve dans le livre de Farmer (1999, section 5.3.1). Dans le travail pratique 2 (de l'anne 2005) je vous demande de montrer cette quivalence dans le cadre d'un modle simple.

Le planificateur peut dicter l'allocation des ressources indpendemment des prix. Il maximise le bien-tre de l'individu sujet la squence de contraintes de ressources globales et sujet bien sr la fonction de production agrge. Son problme crit sous forme de lagrangien est:

$$\max_{c_{t+i},k_{t+1+i},l_{t+i},\lambda_{t+i}} \mathcal{L} = E_t \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \Bigg\{ \ln(c_{t+i}) - \frac{\chi}{1+\psi} {l_{t+i}}^{1+\psi}$$

$$+\lambda_{t+i} \left({k_{t+i}}^{\alpha} \left(z_{t+i} l_{t+i}\right)^{(1-\alpha)} + (1-\delta) k_{t+i} - c_{t+i} - k_{t+1+i} - g_{t+i} \right) \Bigg\}.$$

Les CPOs par rapport aux variables pouvant tres choisies en t sont:

$$c_t : \frac{1}{c_t} - \lambda_t = 0;$$

$$l_t : -\chi {l_t}^{\psi} + \lambda_t (1-\alpha) {k_t}^{\alpha} {z_t}^{(1-\alpha)} {l_t}^{-\alpha} = 0;$$

$$k_{t+1} : -\lambda_t + \beta E_t \lambda_{t+1} \left(\alpha {k_{t+1}}^{(\alpha-1)} \left(z_{t+1} l_{t+1}\right)^{(1-\alpha)} + (1-\delta) \right) = 0.$$

Nous pouvons facilement montrer que si nous considrons le problme de maximisation des profits par une firme concurentielle reprsentative et le problme de maximisation de l'utilit par un agent reprsentatif, nous pouvons (aprs avoir dfini l'quilibre concurentiel de faon approprie) rsumer cet quilibre concurrentiel par exactement le mme systme d'quations.

6 Solution du modle

Sauf pour des cas spciaux il n'y a pas de solution exacte notre modle. Ce que l'on fait habituellement avec ce type de modle est de chercher une solution **approximative**. Nous pouvons analyser les proprits de cette solution par le biais de **simulations numriques**. Je ne vous demande pas de faire ce type de simulations dans le cadre du cours. Nanmoins, il est intressant (j'espre) de comprendre comment les chercheurs procdent. La mthode le plus frquemment utilise est celle de la **linarisation** des conditions d'quilibre autour de l'quilibre stationnaire dterministe. Les tapes sont les suivantes:

1. Stationnariser les variables du modle.
2. Calculer l'tat stationnaire dterministe du modle. (Voir la dfinition ci-dessous.)
3. Linariser les quations du modle autour de cet tat stationnaire.
4. Assigner des valeurs numrique aux paramtres structurelles du modle (calibration ou talonnage).
5. Simplifier les quations pour trouver la forme canonique (espace-tat) du systme.
6. Engendrer des valeurs des chocs du modle en utilisant un gnrateur de nombres (pseudo) alatoires.
7. Engendrer des valeurs pour les variables endognes du modle.
8. Calculer les statistiques d'intrt.
9. valuer le modle en comparant les statistiques avec les statistiques correspondant dans les donnes.

6.1 Stationnarisation

Il faut d'abord rendre les variables du modle stationnaires si elles ne le sont pas au dpart. Si on suppose un choc techologique persistant et stationnaire, le problme ne se pose pas. Sinon, nous pouvons rcrire le systme de la faon suivante. Il s'agit essentiellement de diviser les variables dans le modle qui sont non stationnaires par une variable qui a le mme taux de croissance.
Notre choix des formes fonctionnelles ici garantit l'existence d'un sentier de croissance quilibre o y_t, c_t, i_t, g_t, k_t, etc., vont augmenter au mme taux de croissance. L'utilit marginal de la consommation, tant donn notre fonction d'utilit logarithmique en c_t, va dcrotre au mme taux que le taux de croissance de c_t. J'ai choisi ici de diviser toutes les variables non stationnaires par z_t et donc il faudra **multiplier** λ_t par z_t pour le rendre stationnaire. Commenons avec les CPOs:

$$\frac{1}{(c_t/z_t)} = (\lambda_t z_t);$$

$$\chi {l_t}^{(\psi+\alpha)} = (\lambda_t z_t)(1-\alpha)\left(k_t/z_{t-1}\right)^{\alpha}\left(z_{t-1}/z_t\right)^{\alpha};$$

Il y a un point ici qui est technique mais qui est pourtant important. Nous divisons la variable k_t par z_{t-1} et non par z_t. Sachant que le stock de capital lui-mme est **prdtermin** en t, ceci garantit que la variable normalise le sera aussi. Un choc qui affecte le progrs technique en t n'aura pas d'impact sur k_t/z_t. La distinction entre variables prdtermines en t et non prdtermines en t sera cruciale pour l'obtention d'une solution. Continuons avec l'quation d'Euler:

$$(\lambda_t z_t) =$$

$$\beta E_t(\lambda_{t+1} z_{t+1})(z_t/z_{t+1}) \left(\alpha(k_{t+1}/z_t)^{(\alpha-1)} {l_{t+1}}^{(1-\alpha)} \left(z_{t+1}/z_t\right)^{(1-\alpha)} + (1-\delta)\right).$$

Nous avons aussi la contrainte de ressources, que nous pouvons crire de la faon suivante aprs avoir incorpor la fonction de production agrge:

$$\left(k_t/z_{t-1}\right)^{\alpha} \left(z_{t-1}/z_t\right)^{\alpha} \left(l_t\right)^{(1-\alpha)} =$$

$$\left(c_t/z_t\right) + \left(k_{t+1}/z_t\right) - (1-\delta)\left(k_t/z_{t-1}\right)\left(z_{t-1}/z_t\right) + \left(g_t/z_t\right)$$

Je vous demanderais de vrifier que je n'ai pas chang les galits en affectant ces transformations. crivons le systme de la manire suivante:

$$\frac{1}{\bar{c}_t} = \bar{\lambda}_t;$$

$$\chi(l_t)^{(\psi+\alpha)} = \bar{\lambda}_t(1-\alpha)(\bar{k}_t)^{\alpha}(\bar{z}_t)^{-\alpha};$$

$$\bar{\lambda}_t = \beta E_t \bar{\lambda}_{t+1} \left(\alpha(\bar{k}_{t+1})^{(\alpha-1)}(l_{t+1})^{(1-\alpha)}(\bar{z}_{t+1})^{(-\alpha)} + (1-\delta)/\bar{z}_{t+1}\right);$$

$$(\bar{k}_t)^{\alpha}(\bar{z}_t)^{-\alpha}(l_t)^{(1-\alpha)} = \bar{c}_t + \bar{k}_{t+1} - (1-\delta)\bar{k}_t/\bar{z}_t + \bar{g}_t.$$

o les barres sur les variables dnotent des variables normalises.

6.2 Variables d’tat

part les variables exognes ($\bar{z}_t$ et $\bar{g}_t$), il y a quatre inconnus dans ce systme de quatre quations. En dpit du fait que l_t parat dans le systme date en t et en $t+1$, elle n’est pas vraiement une variable dynamique. La deuxime quation nous dit que l_t dpend des valeurs en priode t de $\bar{k}_t$, de $\bar{z}_t$ et de $\bar{\lambda}_t$.

Ceci soulve un point relativement important concernant la solution de ce type de modle. Dans notre modle trs simple, il est facile de reconnatre le fait que l_t n’est pas vraiment une variable dynamique et de l’liminer par substitution l’aide de la deuxime quation. Dans des modles plus complexes, ceci pourrait tre trs difficile. Pour cette raison, des auteurs comme Uhlig (1999) prconise une technique de solution assez gnrale pour permettre au chercheur de ne pas se proccuper par de telles questions. Essentiellement, Uhlig crit un algorithme qui reconnat automatiquement quand une variable n’est pas une vritable variable dynamique. Ceci dit, nous pouvons utiliser la CPO pour le choix de l_t afin d’liminer l_t du systme d’quations, et la CPO pour le choix de $\bar{c}_t$ afin d’liminer c_t. En fait, nous avons un choix. Ou bien nous pouvons le faire directement, avant de linariser les quations. Ou bien nous pouvons linariser les quatre quations avant de substituer les quivalents linariss de $\bar{c}_t$ et l_t. Procdons directement la linarisation. Pour cela, il faut d’abord calculer le point autour duquel on linarise, soit l’tat stationnaire dterministe.

6.3 tat stationnaire

Trouvons maintenant l'tat stationnaire dterminisite du modle. Ce dernier, comme nous avons vu dans des cours prcdents, est l'quilibre de long terme du modle en l'absence de chocs stochastiques. Une fois que les variables sont normalises de faon approprie, nous laissons tomber les indices du temps et nous rsolvons le systme non linaire d'quations statiques qui en rsulte. Des fois nous pouvons trouver une solution algbrique (pour des modles suffisamment simples). Des fois il faut trouver une solution numrique une fois que les paramtres de base du modle sont calibrs. Pour des fins de la simulation numriques, une solution numrique est bien sr suffisante.

Il est plus facile de remonter aux CPOs afin de trouver l'tat stationnaire du systme. Utilisons d'abord l'quation d'Euler. Nous avons, laissant tomber l'oprateur d'esprance et les indices du temps:

$$\bar{\lambda} = \beta\bar{\lambda}\left(\alpha\bar{k}^{(\alpha-1)}l^{(1-\alpha)}\bar{z}^{-\alpha} + (1-\delta)/\bar{z}\right)$$

$$\Rightarrow (\bar{z}) = \beta\left(\alpha(\bar{k}/l)^{(\alpha-1)}\bar{z}^{(1-\alpha)} + (1-\delta)\right).$$

compter de ce point, soyons explicite concernant les processus qui gnrent le progrs technique et les dpenses publiques. Supposons que les dpenses normalises $\bar{g}_t$ sont tout simplement constantes, et supposons une tendance stochastique pour le progrs technique avec une innovation qui est non prvisible (non autocorrle).

Autrement dit:

$$\ln(z_t) = g + \ln(z_{t-1}) + \varepsilon_{zt}.$$

En l'absence de choc, nous avons:

$$\ln(z_t) - \ln(z_{t-1}) = g$$

$$\Rightarrow \frac{z_t}{z_{t-1}} \equiv \bar{z} = \exp(g)$$

Nous avons deux inconnus dans notre quation d'Euler, le capital $\bar{k}$ et le travail l. Une autre astuce que nous pouvons utiliser est de traiter le **ratio** $\bar{k}/l$ comme un des inconnus. Notre quation nous dit qu' l'tat stationnaire le ratio capital/travail dpend de β, de α, de δ et de $\bar{z}$.

tant donne cette solution pour $\bar{k}/l$, nous avons partir de la CPO pour le choix de l et la contrainte de ressources:

$$\chi l^{\psi} = \lambda(1-\alpha)(\bar{k}/l)^{\alpha}\bar{z}^{-\alpha};$$

$$(\bar{k}/l)^{\alpha} = 1/(\bar{\lambda} l) + (\bar{k}/l)(1-(1-\delta)/\bar{z}) + \bar{g}/l.$$

Nous avons deux quations et deux inconnus: $\bar{\lambda}$ et l. Nous pouvons utiliser la premire des deux quations afin d'liminer $\bar{\lambda}$, ce qui laisse une quation non linaire pour trouver l.

Lors de la calibration de modles de ce type, il est conventionnel de fixer la valeur de l (par exemple en supposant une dotation de temps normalise un et en supposant que les individus passent en moyenne un tiers de leur temps travailler, on aurait $l = 1/3$). De cette faon, la contrainte de ressources nous donnent directement la valeur de $\bar{\lambda}$:

$$\bar{\lambda} = \left(l(\bar{k}/l)^{\alpha} - l(\bar{k}/l)(1 - (1-\delta)/\bar{z}) - \bar{g}\right)^{-1}$$

Ensuite, la CPO pour le choix de l nous donne la valeur de χ ncessaire our obtenir la valeur dsire de l, si nous imposons la valeur de ψ.

6.4 Calibration

Voici la liste des paramtres structurelles du modle: β, α, δ, χ, ψ, g. Il y a aussi la variance de l'innovation ε_{zt}.
Habituellement, on attribue des valeurs numriques aux paramtres sur la base de connaissances pralables, d'tudes micro-conomtriques, ou sur la base de donnes macroconomiques.

- β: il y a un lien troit entre la valeur de β et le taux d'intrt rel long terme. Souvent on choisit une valeur qui donne une valeur particulire de ce taux d'intrt. Ceci revient choisir β sur la base d'une estimation du taux d'intrt rel moyen. Pour des donnes trimestrielles, une valeur raisonnable serait $\beta = 0.99$

- α: dans un quilibre concurrentiel, α nous donne la part du capital dans le revenu national. On peut fixer la valeur de α sur la base d'une estimation de la valeur moyenne de cette part dans les donnes. Une valeur raisonnable serait $\alpha = 0.33$.

- δ: on fixe la valeur de δ sur la base d'une estimation du taux de dprciation moyen. Une valeur raisonnable pour des donnes trimestrielles serait $\delta = 0.025$.

- χ: souvent on va fixer sa valeur pour reproduire le niveau moyen souhait d'heures travailles.

- g: on peut fixer g sur la base d'une estimation du taux de croissance rel moyen du PIB par habitant. Une valeur raisonnable pour des donnes trimestrielles serait $g = 0.005$.

- ψ: reli l'lasticit de l'offre de travail. Il n'y a pas de consensus concernant sa valeur. Souvent l'objet d'analyses de sensibilit. Une valeur raisonnable serait $\psi = 1.0$.

- $\mathrm{Var}(\varepsilon_{zt}$: souvent fix sur la base d'une estimation de la variance des rsidus de Solow.

6.5 Linarisation

Il s'agit maintenant d'utiliser les techniques dcrites par Uhlig (1999) ou par Campbell (1994) afin de log-linariser le systme de deux quations autour de son tat stationnaire. Personnellement, j'applique les deux trucs suivants lorsque je linarise un modle. Premirement, nous avons pour une variable quelconque x_t que:

$$\ln(x_t) \approx \ln(x) + \frac{1}{x}(x_t - x)$$

$$\Rightarrow \ln(x_t) - \ln(x) = \frac{(x_t - x)}{x}.$$

Donc, la dviation du log d'une variable par rapport au log l'tat stationnaire est gale la dviation en niveau divise par la valeur de la variable l'tat stationnaire. Dans la mesure o on veut mesurer les dviations en logs de nos variables, il est souvent beaucoup plus facile de calculer les dviations en niveau et ensuite de diviser ces dviations par les valeurs l'tat statonnaire.

Deuximent, si j'ai au dpart deux fonction quelconques des variables quelconques x_t, y_t et z_t et une galit qui relie les deux:

$$F(x_t, y_t, z_t) = G(x_t, y_t, z_t),$$

on a immdiatement:

$$F(x, y, z) + \frac{\partial F(\cdot)}{\partial x}(x_t - x) + \frac{\partial F(\cdot)}{\partial y}(y_t - y) + \frac{\partial F(\cdot)}{\partial z}(z_t - z)$$

$$\approx G(x, y, z) + \frac{\partial G(\cdot)}{\partial x}(x_t - x) + \frac{\partial G(\cdot)}{\partial y}(y_t - y) + \frac{\partial G(\cdot)}{\partial z}(z_t - z).$$

Mais si l'galit tient en dehors de l'tat stationnaire elle doit tenir aussi l'tat stationnaire. Donc, les termes d'ordre zro disparaissent ici et nous avons:

$$\frac{\partial F(\cdot)}{\partial x}(x_t - x) + \frac{\partial F(\cdot)}{\partial y}(y_t - y) + \frac{\partial F(\cdot)}{\partial z}(z_t - z)$$

$$\approx \frac{\partial G(\cdot)}{\partial x}(x_t - x) + \frac{\partial G(\cdot)}{\partial y}(y_t - y) + \frac{\partial G(\cdot)}{\partial z}(z_t - z).$$

On peut ngliger les termes d'ordre zro dans nos calculs puisqu'ils vont de toute faon s'annuler.

Commenons avec la CPO pour la consommation:

$$\bar{\lambda}_t = 1/\bar{c}_t$$

$$\Rightarrow (\bar{\lambda}_t - \bar{\lambda}) \approx -\frac{1}{\bar{c}^2}(\bar{c}_t - \bar{c})$$

$$\Rightarrow \bar{c}(\bar{\lambda}_t - \bar{\lambda}) \approx -\frac{(\bar{c}_t - \bar{c})}{\bar{c}}$$

$$\Rightarrow \frac{(\bar{\lambda}_t - \bar{\lambda})}{\bar{\lambda}} \approx -\frac{(\bar{c}_t - \bar{c})}{\bar{c}}.$$

Utilisons une notation un peu plus compacte:

$$\widetilde{\lambda}_t = -\widetilde{c}_t \tag{1}$$

o un tilde sur une variable indique sa dviation proportionnelle par rapport sa valeur l'tat stationnaire et o on remplace l'galit approximative par une galit pour simplifier la notation. La dviation proportionnelle de la consommation est le ngatif de la dviation proportionnelle de son utilit marginale.

Maintenant, travaillons avec la CPO pour le choix des heures:

$$\chi(l_t)^{(\psi+\alpha)} = (1-\alpha)\bar{\lambda}_t(\bar{k}_t)^{\alpha}(\bar{z}_t)^{-\alpha}$$

$$\Rightarrow \chi(\psi+\alpha)l^{(\psi+\alpha-1)}(l_t - l) \approx (1-\alpha)\bar{k}^{\alpha}\bar{z}^{-\alpha}(\bar{\lambda}_t - \bar{\lambda})$$

$$+\alpha(1-\alpha)\bar{\lambda}\bar{k}^{(\alpha-1)}\bar{z}^{-\alpha})(\bar{k}_t - \bar{k})$$

$$-\alpha(1-\alpha)\bar{\lambda}\bar{k}^{\alpha}\bar{z}^{(-\alpha-1)})(\bar{z}_t - \bar{z}).$$

Maintenant, voici une autre astuce. Une fois que l'on rcrit ceci en termes de dviations proportionnelles, il y des choses qui vont disparatre. Nous avons:

$$(\psi+\alpha)\left[\chi l^{(\psi+\alpha)}\right]\widetilde{l}_t \approx \left[(1-\alpha)\bar{\lambda}\bar{k}^{\alpha}\bar{z}^{-\alpha}\right]\widetilde{\lambda}_t$$

$$+\alpha\left[(1-\alpha)\bar{\lambda}\bar{k}^{\alpha}\bar{z}^{-\alpha}\right]\widetilde{k}_t$$

$$-\alpha\left[(1-\alpha)\bar{\lambda}\bar{k}^{\alpha}\bar{z}^{-\alpha}\right]\widetilde{z}_t.$$

Puisque nous avons:

$$\left[\chi l^{(\psi+\alpha)}\right] = \left[(1-\alpha)\bar{\lambda}\bar{k}^{\alpha}\bar{z}^{-\alpha}\right],$$

notre condition se simplifie beaucoup:

$$(\psi+\alpha)\widetilde{l}_t = \widetilde{\lambda}_t + \alpha\widetilde{k}_t - \alpha\widetilde{z}_t, \tag{2}$$

o j'ai remplac l'galit approximative par une galit pour simplifier la notation. Maintenant, travaillons avec la contrainte de ressources:

$$(\bar{k}_t)^{\alpha}(\bar{z}_t)^{-\alpha}(l_t)^{(1-\alpha)} = \bar{c}_t + \bar{k}_{t+1} - (1-\delta)\bar{k}_t/\bar{z}_t + \bar{g}_t.$$

Je vais aller un peu plus rapidement cette fois-ci. Nous avons:

$$\alpha\left[\bar{k}^{\alpha}\bar{z}^{-\alpha}l^{(1-\alpha)}\right]\frac{(\bar{k}_t-\bar{k})}{\bar{k}}$$

$$-\alpha\left[\bar{k}^{\alpha}\bar{z}^{-\alpha}l^{(1-\alpha)}\right]\frac{(\bar{z}_t-\bar{z})}{\bar{z}}$$

$$+(1-\alpha)\left[\bar{k}^{\alpha}\bar{z}^{-\alpha}l^{(1-\alpha)}\right]\frac{(l_t-l)}{l}$$

$$=\bar{c}\frac{(\bar{c}_t-\bar{c})}{\bar{c}}+\bar{k}\frac{(\bar{k}_{t+1}-\bar{k})}{\bar{k}}-(1-\delta)\frac{1}{\bar{z}}\bar{k}\frac{(\bar{k}_t-\bar{k})}{\bar{k}}+(1-\delta)\frac{1}{\bar{z}}\bar{k}\frac{(\bar{z}_t-\bar{z})}{\bar{z}}.$$

Le terme en $\bar{g}_t$ disparat puisqu'on suppose que les dpenses normalises sont constantes. Dfinissons

$$\left[\bar{k}^{\alpha}\bar{z}^{-\alpha}l^{(1-\alpha)}\right]\equiv\bar{y},$$

le PIB normalis. Nous pouvons crire:

$$\alpha\widetilde{k}_t-\alpha\widetilde{z}_t+(1-\alpha)\widetilde{l}_t$$

$$=\frac{\bar{c}}{\bar{y}}\,\widetilde{c}_t+\frac{\bar{k}}{\bar{y}}\,\widetilde{k}_{t+1}-(1-\delta)\frac{1}{\bar{z}}\frac{\bar{k}}{\bar{y}}\,\widetilde{k}_t+(1-\delta)\frac{1}{\bar{z}}\frac{\bar{k}}{\bar{y}}\,\widetilde{z}_t,$$

qui peut tre rcrite de la faon suivante:

$$\alpha\widetilde{k}_t - \alpha\widetilde{z}_t + (1-\alpha)\widetilde{l}_t$$

$$= \frac{\bar{c}}{\bar{y}}\,\widetilde{c}_t + \frac{\bar{k}}{\bar{y}}\,\widetilde{k}_{t+1} - (1-\delta)\frac{1}{e^g}\frac{\bar{k}}{\bar{y}}\,\widetilde{k}_t + (1-\delta)\frac{1}{e^g}\frac{\bar{k}}{\bar{y}}\,\widetilde{z}_t. \tag{3}$$

Les coefficients qui multiplient nos variables en dviation dpendent soit de paramtres de base du modle (α, δ, g), soit de ratios consommation-output ou capital-output. Puisque nous avons calcul l'tat stationnaire de l'conomie, nous connaissons ces valeurs. De plus,

Finalement, reprenons l'quation d'Euler:

$$\bar{\lambda}_t = \beta E_t \bar{\lambda}_{t+1}\left(\alpha(\bar{k}_{t+1})^{(\alpha-1)}(l_{t+1})^{(1-\alpha)}(\bar{z}_{t+1})^{(-\alpha)} + (1-\delta)/\bar{z}_{t+1}\right).$$

Pour commencer, nous savons que dans un quilibre concurrentiel, il faut que

$$\alpha(\bar{k}_{t+1})^{(\alpha-1)}(l_{t+1})^{(1-\alpha)}(\bar{z}_{t+1})^{(-\alpha)} = r_{t+1}$$

o r_{t+1} est le taux de location du capital en $t+1$. Ceci nous permet de simplifier la notation. Nous avons:

$$\bar{\lambda}\widetilde{\lambda}_t = \beta(r + (1-\delta)/\bar{z})\bar{\lambda}E_t\widetilde{\lambda}_{t+1} + \beta\bar{\lambda}(\alpha-1)r\widetilde{k}_{t+1}$$

$$+\beta\bar{\lambda}(1-\alpha)rE_t\widetilde{l}_{t+1} - \beta\bar{\lambda}\alpha r E_t\widetilde{z}_{t+1} - \beta\bar{\lambda}(1-\delta)\frac{1}{\bar{z}^2}E_t\widetilde{z}_{t+1}.$$

Cette quation dpend de paramtres structurels et du taux de location du capital l'tat stationnaire, que nous pouvons calculer.

Dernire astuce. Nous avons:

$$\frac{z_t}{z_{t-1}} = \exp(g)\exp(\varepsilon_{zt})$$

$$\approx \exp(g) + \exp(g)(\varepsilon_{zt} - 0).$$

Ceci veut dire que la dviation proportionnelle de $\bar{z}_t$ est gale tout simplement ε_{zt}. Puisque cette innovation est par hypothse imprvisible, nous avons

$$E_t\widetilde{z}_{t+1} = 0$$

et nous pouvons crire:

$$\widetilde{\lambda}_t = \beta(r + (1-\delta)/\bar{z})E_t\widetilde{\lambda}_{t+1} + \beta(\alpha - 1)r\widetilde{k}_{t+1} + \beta(1-\alpha)rE_t\widetilde{l}_{t+1}. \tag{4}$$

Si maintenant nous utilisons nos quations approximes pour substituer $\widetilde{l}_t$, $\widetilde{l}_{t+1}$, et $\widetilde{c}_t$, nous avons un systme d'quations de la forme:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{k}_{t+1} \\ E_t\widetilde{\lambda}_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{k}_t \\ \widetilde{\lambda}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \varepsilon_{zt}. \tag{5}$$

6.6 Solution par la mthode des coefficients indtermins

Pour employer cette technique il faut connatre ou deviner la forme de la solution.
La solution prend la forme suivant:

$$\widetilde{k}_{t+1} = \eta_{kk}\widetilde{k}_t + \eta_{k\varepsilon}\varepsilon_{zt};$$

$$\widetilde{\lambda}_t = \eta_{ck}\widetilde{k}_t + \eta_{c\varepsilon}\varepsilon_{zt}.$$

Ici, les η peuvent tre interprts comme des lasticits (lasticit du stock de capital futur par rapport au stock de capital courant, etc.), puisque nos variables sont mesures en dviations proportionnelles par rapport l'tat stationnaire.
Substituant dans l'quation (5), nous obtenons:

$$\eta_{kk}\widetilde{k}_t + \eta_{k\varepsilon}\varepsilon_{zt} = a_{11}\widetilde{k}_t + a_{12}(\eta_{ck}\widetilde{k}_t + \eta_{c\varepsilon}\varepsilon_{zt}) + b_1\varepsilon_{zt};$$

$$E_t(\eta_{ck}\widetilde{k}_{t+1} + \eta_{c\varepsilon}\varepsilon_{zt+1}) = a_{21}\widetilde{k}_t + a_{22}(\eta_{ck}\widetilde{k}_t + \eta_{c\varepsilon}\varepsilon_{zt}) + b_2\varepsilon_{zt}$$

$$\Rightarrow \eta_{ck}\widetilde{k}_{t+1} = a_{21}\widetilde{k}_t + a_{22}(\eta_{ck}\widetilde{k}_t + \eta_{c\varepsilon}\varepsilon_{zt}) + b_2\varepsilon_{zt}$$

$$\Rightarrow \eta_{ck}(\eta_{kk}\widetilde{k}_t + \eta_{k\varepsilon}\varepsilon_{zt}) = a_{21}\widetilde{k}_t + a_{22}(\eta_{ck}\widetilde{k}_t + \eta_{c\varepsilon}\varepsilon_{zt}) + b_2\varepsilon_{zt}.$$

Ces galits doivent tenir pour toutes les valeurs possibles de $\widetilde{k}_t$ et de ε_{zt}. Ceci peut tre vrai seulement si les coefficients des deux cts de ces galits sont gaux. Nous obtenons ainsi le systme de quatre quations suivant:

$$\eta_{kk} = a_{11} + a_{12}\eta_{ck};$$

$$\eta_{k\varepsilon} = a_{12}\eta_{c\varepsilon} + b_1;$$

$$\eta_{ck}\eta_{kk} = a_{21} + a_{22}\eta_{ck};$$

$$\eta_{ck}\eta_{k\varepsilon} = a_{22}\eta_{c\varepsilon} + b_2.$$

Les inconnus ici sont les η. Utilisant la premire quation pour substituer η_{kk} dans la troisime, nous obtenons

$$a_{11}\eta_{ck} + a_{12}{\eta_{ck}}^2 = a_{21} + a_{22}\eta_{ck}$$

Cette dernire quation est quadratique en η_{ck}. Normalement elle admet deux solutions relles. Pour une de ces solutions, la solution propose est "stable", puisque la valeur de η_{kk} compatible avec cette solution est infrieure un en valeur absolue. Pour l'autre, la solution propose est instable. Nous choisissons la solution pour η_{ck} qui donne un systme stable.

6.7 Simulation

Avec une valeur initiale de $\widetilde{k}_1$ et une srie de chocs $\varepsilon_{zt},\ t = 1 \ldots T$ engendre par un gnrateur de nombre alatoires, nous pouvons gnrer des valeurs pour $\widetilde{\lambda}_t$ et $\widetilde{k}_t$ avec une boucle:

- De $t = 1$ T
  - $\widetilde{k}_{t+1} = \eta_{kk}\widetilde{k}_t + \eta_{k\varepsilon}\varepsilon_{zt}$
  - $\widetilde{\lambda}_t = \eta_{ck}\widetilde{k}_t + \eta_{c\varepsilon}\varepsilon_{zt}$

- Fin de la boucle

l'intrieur de la boucle, nous pouvons aussi calculer les valeurs d'autres variables d'intrt et sauvegarder les rsultats afin de passer l'tape de comparaison entre les prdictions du modle et les donnes.

6.8 La mthode "forward-backward" de Blanchard et Kahn

Pour plus de dtails, voir Ambler (2003).

7 Prdictions et valuation du Modle

Pour plus de dtails, voir Stadler (1994).

Rfrences

Je n'inclus dans cette section que les références ne paraissant pas dans la bibliographie de Romer (1996).

Amato, Jeffery and Thomas Laubach (1999), "Monetary Policy in an Estimated Optimization-Based Model with Sticky Prices and Wages", working paper 99-09, Federal Reserve Bank of Kansas City

Ambler, Steve (2002), "Nominal Wage Rigidity as a Nash Equilibrium", cahier de recherche 0307, CREFEE

Ambler, Steve (2003), "Notes on the Forward-Backward Simulation Method", UQAM http://www.er.uqam.ca/nobel/r10735/9011/forbackd.pdf

Ambler, Steve, Alain Guay and Louis Phaneuf (1999), “Wage Contracts and Labor Adjustment Costs as Internal Propagation Mechanisms”, cahier de recherche 69, Centre de recherche sur l’emploi et les fluctuations économiques, UQAM

Chari, V.V., Patrick Kehoe and Ellen McGrattan (2000), “Sticky Price Models of the Business Cycle: Can the Contract Multiplier Solve the Persistence Problem?”, *Econometrica*

Cogley, Timothy and James M. Nason (1995), “Output Dynamics in Real Business Cycle Models”, *American Economic Review* 85, 492-511

Cooley, Thomas F. (1995), *Frontiers in Business Cycle Research.* (Princeton, Princeton University Press)

Cooley, Thomas F. and Gary D. Hansen (1989), “The Inflation Tax in a Real Business Cycle Model”, *American Economic Review* 79, 733-748

Cooley, Thomas F. and Gary D. Hansen (1995), “Money and the Business Cycle”, in T. Cooley, ed., *Frontiers of Business Cycle Research.* (Princeton, Princeton University Press)

Cooley, Thomas F. and Edward C. Prescott (1995), “Economic Growth and Business Cycles”, in T. Cooley, ed., *Frontiers of Business Cycle Research.* (Princeton, Princeton University Press)

Danthine, Jean-Pierre (1998) “À la poursuite du Graal: le successeur d’IS-LM est-il identifié?”, *Actualité économique*

Erceg, Christopher, Dale Henderson and Andrew Levin (2000), "Optimal Monetary Policy with Staggered Wage and Price Contracts", *Journal of Monetary Economics* 46, 281-313

Farmer, Roger (1999), *Macroeconomics of Self-Fulfilling Prophecies*. 2[e] dition, Cambridge, MA, MIT Press

Goodfriend, Marvin et Robert King (1997), "The New Neoclassical Synthesis and the Role of Monetary Policy", in Ben Bernanke and Julio Rotemberg, eds., *NBER Macroeconomics Annual 1997.* (Cambridge, MA, MIT Press)

Guay, Alain et Pierre St-Amant (1997), "Do Hodrick-Prescott and Baxter-King Filters Provide a Good Approximation of Business Cycles?", cahier de recherche 53, Centre de recherche sur l'emploi et les fluctuations économiques, UQAM

Hansen, Gary D. and Edward C. Prescott (1995), "Recursive Methods for Computing Equilibria of Business Cycle Models", in T. Cooley, ed., *Frontiers of Business Cycle Research.* (Princeton, Princeton University Press)

Huang, Kevin and Zheng Liu (2002), "Staggered Price-Setting, Staggered Wage-Setting and Business Cycle Persistence", *Journal of Monetary Economics* 49, 405-433

Ireland, Peter (2002), "A Method for Taking Models to the Data", Boston College

Ireland, Peter (2001), "Sticky-Price Models of the Business Cycle: Specification and Stability", *Journal of Monetary Economics*

Judd, Kenneth (1998), *Numerical Methods in Economics.* Cambridge, MA, MIT Press

King, Robert et Sergio Rebelo (1990), “Public Policy and Economic Growth: Developing Neoclassical Implications”, *Journal of Political Economy* 98, 126-150.

King, Robert et Sergio Rebelo (2000), “Resuscitating Real Business Cycle Models”, NBER working paper 7534, aussi dans John Taylor et Michael Woodford (éds.), *Handbook of Macroeconomics*. Amsterdam, North Holland. La version cahier est encore disponible l’adresse suivante:

`http://www.nber.org`

Phaneuf, Louis (1994), “Marché du travail et cycle économique: de la réalité aux modèles” *Interfaces* mai-juin, 42-50

Rotemberg, Julio and Michael Woodford (1997), “An Optimization-Based Econometric Framework for the Evaluation of Monetary Policy”, in Ben Bernanke and Julio Rotemberg, eds., *NBER Macroeconomics Annual 1997*. (Cambridge, MIT Press)

Rios-Rull, José Victor (1995), “Models with Heterogeneous Agents” in T. Cooley, ed., *Frontiers of Business Cycle Research*. (Princeton, Princeton University Press)

Rios-Rull, José Victor (1999), “Computation of Equilibria in Heterogeneous-Agent Models” dans Ramon Marimon and Andrew Scott, eds., *Computational Methods for the Study of Dynamic Economies*. Oxford, Oxford University Press

Stock, James et Mark Watson (1990), “Business Cycle Properties of Selected U.S. Economic Time Series 1959-1988”, NBER working paper 3376

Stadler, George (1990), “Business Cycle Models with Endogenous Technology”, *American Economic Review* 80, 763-778

Stadler, George (1994), “Real Business Cycle Models,” *Journal of Economic Literature*

Uhlig, Harald (1999), “A Toolkit for Analyzing Nonlinear Dynamic Stochastic Models Easily,” dans Ramon Marimon and Andrew Scott, eds., *Computational Methods for the Study of Dynamic Economies*. Oxford, Oxford University Press. Une version complte de l’article et tous les programmes sont disponible l’adresse suivante:
`http://www.wiwi.hu-berlin.de/wpol/html/toolkit/toolkit.pdf`

cette version: 21/10/2005