

# Notes sur les Modèles de Cycles Réels et leurs Successeurs \*

Steve Ambler  
Département des sciences économiques  
École des sciences de la gestion  
Université du Québec à Montréal ©2008: Steve Ambler  
Automne 2008

## Contents

<b>1 Introduction</b>	<b>2</b>
1.1 Mots clés . . . . .	2
<b>2 Importance de la tendance dans les modèles du cycle réel</b>	<b>5</b>
<b>3 Faits stylisés du cycle en économie fermée</b>	<b>8</b>
3.1 Variabilités, variabilités relatives . . . . .	8
3.2 Corrélations contemporaines . . . . .	8
3.3 Aspects dynamiques: autocorrélations et corrélations décalées . .	9

---

\*Je travaille de façon continue sur ces notes. Pour signaler des coquilles ou pour suggérer des améliorations, veuillez m'envoyer un courriel à [ambler.steven@uqam.ca](mailto:ambler.steven@uqam.ca).

<b>4</b>	<b>Historique des modèles du cycle réel</b>	<b>9</b>
4.1	Première génération: Kydland et Prescott (1982) . . . . .	9
4.2	La variabilité des heures travaillées et la deuxième génération de modèles: Hansen (1985) . . . . .	10
4.3	La corrélation productivité-heures et la troisième génération de modèles . . . . .	11
4.4	La critique de Cogley et Nason (1995) . . . . .	11
4.5	Vers une nouvelle synthèse? . . . . .	12
4.6	La recrudescence de techniques économétriques et les modèles du cycle économique . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Approche à la modélisation par la programmation dynamique</b>	<b>15</b>
<b>6</b>	<b>Vers une synthèse: les modèles du cycle avec maximisation et rigidités nominales</b>	<b>24</b>
<b>7</b>	<b>Les modèles avec agents hétérogènes</b>	<b>24</b>
<b>8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>25</b>

# 1 Introduction

## 1.1 Mots clés

- Stationnarité

- Persistance
- Corrélation fictive
- Tendance stochastique
- Tendance déterministe
- Calibration (étalonnage)
- Normalisation
- RBC (Real Business Cycle)
- Raisons de mon insatisfaction relatif à ce chapitre de Romer (2005).
  1. Section 4.1 - présentation très non orthodoxe des faits stylisés du cycle économique.
  2. Section 4.3 - élaboration d'un modèle RBC de base sans faire trop d'attention à la tendance dans le progrès technique.
  3. Section 4.7 - analyse d'un modèle RBC de base en étudiant la réponse de certaines variables à des chocs différents.
  4. Section 4.8 - évaluation de l'importance de la composante permanente comme façon d'évaluer l'approche RBC.
- Différences de ce texte par rapport au texte de King et Rebelo (1999).

1. King et Rebelo mettent l'accent sur une faiblesse particulière de la première génération des modèles RBC: la taille des chocs technologiques nécessaire pour reproduire la variabilité observée de l'output et des autres agrégats macroéconomiques. Si on calibre (étalonne) le processus stochastique engendrant les chocs de façon à pouvoir expliquer cette variabilité, la probabilité que l'économie subisse un choc technologique négatif devient relativement élevée. Cette possibilité de regrès technique ("technological regress") ne semble pas très plausible.
  2. Je mets l'accent ici sur une autre faiblesse des modèles RBC de première génération: leur difficulté à reproduire certains faits stylisés du marché du travail, notamment la corrélation faible dans les données entre la productivité de la main-d'œuvre (ou le salaire réel) et l'emploi.
  3. King et Rebelo parlent de la critique de Cogley et Nason (1995), mais ils ne relient pas cette critique à la façon de stationnariser les données, et le fait que les filtres Hodrick-Prescott ou bandpass puissent introduire des "autocorrélations fictives" dans les séries macroéconomiques.
- L'objectif de cette partie du cours sera d'étudier l'historique du développement de l'approche de cycle réels (ou **RBC** – Real Business Cycles), et d'étudier en détail un modèle simplifié qui ressemble à quelques

différences près au modèle élaboré dans l'article classique de Kydland et Prescott (1982). Je mettrai l'accent sur l'utilisation de la programmation dynamique pour résoudre le modèle et sur la modélisation de la tendance.

## 2 Importance de la tendance dans les modèles du cycle réel

- On s'intéresse aux propriétés cycliques des modèles et des données, donc la **stationnarité** est extrêmement importante.
- Pour éviter les problèmes de **corrélations fictives**, lorsqu'on calcule les propriétés de séries chronologiques macroéconomiques, il faut qu'elles soient stationnaires.
- Par contre, on constate que la plupart des séries macroéconomiques ne sont pas stationnaires.
- Il faut extirper la tendance. La méthodologie utilisée peut avoir des conséquences très importantes pour les propriétés de la composante cyclique.
- Par exemple, le fait d'extirper une tendance en appliquant un filtre Hodrick-Prescott ou en calculant une série en taux de croissance peut affecter la **persistance** de la série (mesurée, par exemple, par sa fonction d'autocorrélation). Si on s'intéresse au comportement dynamique conjoint

de deux ou de plusieurs séries, le fait d'utiliser le filtre HP ou de calculer en taux de croissance peut influencer la relation dynamique entre les séries, mesurée par exemple par le calcul de coefficients de corrélation décalés entre deux séries différentes.

La nature et l'origine de la tendance cyclique peuvent affecter la manière de tester ou d'évaluer nos modèles du cycle économique. Un exemple très simple serait la section 4.8 du manuel de Romer. L'argument qu'on retrouve dans cette section est la suivante:

- Les modèles RBC accordent une grande importance au rôle de chocs technologiques.
- Les chocs technologiques ont un impact sur les agrégats macroéconomiques qui a une forte composante permanente. Les chocs de demande agrégée, qui ont une place centrale dans d'autres approches au cycle (par exemple l'approche keynésienne), ont un impact temporaire.
- Pour cette raison, une façon d'évaluer la capacité des modèles RBC d'expliquer le cycle est de mesurer l'importance de la composante permanente des fluctuations du PIB.

On peut faire ressortir le problème avec ce raisonnement avec un contre-exemple. Stadler (1990) construit un modèle de croissance endogène où le taux de progrès technique est aléatoire et dépend de l'allocation des ressources. Le modèle contient aussi des rigidités

nominales, et pour cette raison les chocs de demande agrégée en général et monétaires en particuliers ont un impact sur l'allocation des ressources à court terme et donc sur le taux de progrès technique. Donc, dans ce modèle **tous** les types de chocs, y compris les chocs monétaires, peuvent avoir un effet **permanent** sur les agrégats macroéconomiques. Tester l'importance de la composante permanente du PIB n'est pas une bonne façon de discriminer entre les approches du cycle.

La nature de la tendance est aussi importante pour certains aspects de la modélisation. Par exemple, si on veut résoudre et simuler un modèle avec des techniques de programmation dynamique, il faut stationnariser les problèmes de maximisation afin de pouvoir invoquer les théorèmes reliés aux techniques du "stationary discounted dynamic programming". Nous verrons un exemple concret de ça dans la section du cours qui traite en détail d'un modèle RBC typique.

Considérez les deux méthodologies suivantes pour l'élaboration et l'évaluation d'un modèle du cycle économique.

1. Construire un modèle théorique uniquement de la composante cyclique des séries macroéconomiques. Engendrer les prédictions du modèle, possiblement à l'aide de techniques de simulation numérique. Les séries ainsi engendrer sont par construction stationnaires puisqu'on modélise seulement la composante cyclique des séries. Utiliser une méthodologie standard pour extirper les tendances des agrégats dans les données.

N'importe quelle méthode qui rend les séries stationnaires est acceptable.<sup>1</sup>

Comparer les prédictions du modèle avec ce qu'on observe dans les données.

2. Réfléchir sérieusement concernant la nature de la non-stationnarité dans les données. Si on pense, par exemple, que la R&D est sujette à des aléas importants, il devient difficile d'échapper à la conclusion que la tendance dans le PIB est une tendance stochastique. Ceci va aussi restreindre le choix de comment extirper la tendance des données. Construire un modèle théorique qui reflète nos hypothèses concernant la nature de la non-stationnarité. Extirper la tendance des séries dans les vraies données et dans les données artificielles (engendrées par le modèle) **de la même façon** avant de comparer les prédictions du modèle avec les faits.

### 3 Faits stylisés du cycle en économie fermée

#### 3.1 Variabilités, variabilités relatives

- Voir Tableau 1.1, Tableau 5.1 dans Cooley (1995), Phaneuf (1994), Stock et Watson (1990).

---

<sup>1</sup>Ceci est une raison qui explique la popularité du filtre HP, puisqu'il stationnarise toutes les séries non stationnaires jusqu'à I(4). Voir King et Rebelo (1990) pour une preuve.

### **3.2 Corrélations contemporaines**

- Voir encore Tableau 1.1, Tableau 5.1 dans Cooley (1995), Phaneuf (1994), Stock et Watson (1990).

### **3.3 Aspects dynamiques: autocorrélations et corrélations décalées**

- Voir encore Tableau 1.1, Tableau 5.1 dans Cooley (1995), Phaneuf (1994), Cogley et Nason (1995), Stock et Watson (1990).

## **4 Historique des modèles du cycle réel**

### **4.1 Première génération: Kydland et Prescott (1982)**

- Le modèle ressemble à celui que nous allons étudier en détail plus loin.
- Certains détails du modèle s'avèrent d'une importance secondaire par rapport aux résultats obtenus, et ne sont pas dans le modèle étudié plus loin ("time to build" dans la loi de mouvement du capital, de la consommation retardée dans la fonction d'utilité, etc.).
- Dans l'évaluation du modèle, l'accent est sur le comportement du PIB et de ses composantes: variabilités, variabilités relatives, corrélations contemporaines entre le PIB et ses composantes, etc. Le modèle semble

faire remarquablement bien. Par contre, la variabilité de l'emploi (des heures totales travaillées) est sous-estimée par le modèle.

## 4.2 La variabilité des heures travaillées et la deuxième génération de modèles: Hansen (1985)

- On constate que le modèle de base sous-estime la variabilité des heures travaillées.
- Hansen suppose l'existence d'un coût fixe pour se rendre au travail, ce qui introduit une **non-convexité** dans l'arbitrage entre le loisir et le travail. La manière d'arriver à une allocation de ressources efficace face à cette non-convexité est d'introduire un système d'assurance chômage qui fonctionne comme une loterie. Chaque travailleur est garanti la même valeur de son utilité marginale de la consommation. Seulement une fraction des travailleurs se rendent au travail chaque période. Les travailleurs sont choisis pour travailler (ou non) de façon aléatoire.
- Une condition d'équilibre est que chaque travailleur doit participer volontairement à la loterie, et donc doit être indifférent **ex ante** entre travailler et ne pas travailler. L'offre de travail de chaque individu est effectivement infiniment élastique, et la courbe d'offre de travail agrégée devient beaucoup plus élastique, ce qui permet aux heures de varier beaucoup plus.

### **4.3 La corrélation productivité-heures et la troisième génération de modèles**

- Il n'y a qu'un seul choc dans le modèle de base. Le choc technologique fait déplacer la courbe de demande de travail le long d'une courbe d'offre de travail essentiellement statique ou fixe. Indépendamment de l'élasticité de l'offre de travail, la corrélation entre les heures travaillées et le salaire réel prédit par le modèle est extrêmement élevée. Par extension, la corrélation prédite entre les heures travaillées et la productivité moyenne de la main-d'œuvre et la corrélation prédite entre le PIB et le salaire réel sont extrêmement élevées, trop élevées pour être compatibles avec les données.
- On introduit d'autres chocs comme les dépenses publiques (Christiano et Eichenbaum, 1992), la production domestique (Benhabib, Rogerson et Wright, 1992), etc., afin de mieux prédire les faits stylisés reliés au marché du travail.

### **4.4 La critique de Cogley et Nason (1995)**

- Cogley et Nason font ressortir les effets du filtre H-P sur le comportement dynamique des séries. L'application du filtre a tendance à accentuer les autocorrélations des séries filtrées et donc à exagérer la persistance de ces séries. Voir aussi Guay et StAmant (1997).
- Ils reprennent un certain nombre de modèles de la littérature et montrent

que, lorsque les séries sont mesurées en taux de croissance, aucun des modèles contient des mécanismes de propagation dynamique qui permettraient d'expliquer 1) l'autocorrélation du taux de croissance du PIB et 2) la réponse en forme de bosse des séries comme le PIB à des chocs temporaires.

- La persistance dans les modèles RBC vient presque uniquement de la persistance des chocs. Les mécanismes de persistance **endogènes** de ces modèles sont inadéquats pour expliquer la persistance observée des séries macroéconomiques.

#### 4.5 Vers une nouvelle synthèse?

- Mon jugement personnel est qu'il est difficile de répondre à la critique de Cogley et Nason est d'introduire des rigidités nominales (soit de prix, soit de salaires, soit les deux) dans les modèles.
- En fait, un nombre croissant de chercheurs incorporent des rigidités nominales dans les modèles qui utilisent la même approche de base du modèle RBC de base (spécification explicite des préférences et de la technologie, maximisation par tous les agents dans le modèle, sauf éventuellement les gouvernements, etc.). On parle même d'une nouvelle synthèse néoclassique en théorie macroéconomique ou de la "nouvelle macroéconomie néoclassique" (baptisée "New Neoclassical Synthesis" par Goodfriend et King, 1997). Pour un exemple récent appliqué à l'analyse de

la politique monétaire optimale, voir Amato et Laubach (1999). Voir aussi Erceg, Henderson et Levin (2000), Goodfriend et King (1997) et Rotemberg et Woodford (1997).

- Voir Danthine (1998) pour un bon survol en langue française.
- Ces modèles ne sont pas sans difficultés au plan théorique. Par exemple, Chari, Kehoe et McGrattan (2000) montrent que le degré requis de rigidité de prix pour répondre à la critique de Cogley et Nason n'est pas plausible. Ceci veut dire que le nombre de périodes pendant lequel le prix d'une firme donné n'est pas changé est trop élevé pour être compatible avec l'évidence empirique. Si par contre les firmes gardent leurs prix constants pendant une période plus courte,
- Huang et Liu (2002) ont montré récemment que des modèles incorporant un degré plausible de rigidité **salariale** peuvent engendrer suffisamment de persistance pour répondre à la critique de Cogley et Nason. Donc, cette voie semble être prometteuse. Ambler (2002) a montré aussi que les rigidités nominales salariales peuvent être un équilibre de Nash dans un modèle où l'on introduit des coûts fixes pour ajuster les salaires.

## 4.6 La recrudescence de techniques économétriques et les modèles du cycle économique

- Dans le modèle de base, il y a relativement peu de paramètres libres à calibrer (étalonner). On peut relativement facilement les étalonner sur la base d'évidence microéconomique ou sur la base de données venant de la comptabilité nationale.<sup>2</sup>
- Dans les extensions du modèle de base, on a tendance à introduire de plus en plus de paramètres libres, qui sont moins faciles à étalonner sur la base d'évidence microéconomique.
- On a aussi étendu l'ensemble de faits stylisés utilisé pour évaluer les modèles. Ça nécessite une méthodologie plus formelle pour mesurer la "distance" entre les prédictions du modèle et les faits observés.
- Les premiers exemples de l'utilisation de techniques économétriques pour estimer les modèles RBC sont Altug (1989) et Christiano et Eichenbaum (1992). Les exemples d'articles publiés se multiplient. Pour des exemples, voir Ambler, Guay et Phaneuf (1999), Rotemberg et Woodford (1997), Goodfriend et King (1997), Ireland (2001, 2002).

---

<sup>2</sup>Par exemple, le coefficient associé à l'input travail dans une fonction de production agrégée Cobb-Douglas doit être égal en concurrence parfaite à la part du revenu du travail dans le revenu national. On peut donc étalonner ce paramètre sur la base de données sur le revenu national.

## 5 Approche à la modélisation par la programmation dynamique

Dans cette section, nous considérons un exemple d'un modèle qui a les propriétés suivantes.

- L'équilibre dans le modèle n'est pas un optimum de Pareto. Il faut modéliser explicitement l'équilibre concurrentiel.
- On fait des hypothèses explicites concernant la non-stationnarité.
- On utilise la programmation dynamique pour analyser le problème du consommateur représentatif.
- On peut facilement écrire le modèle sous une forme qui permet l'application directe des techniques décrites par Hansen et Prescott (1995) (ou par la linéarisation des CPOs avec une approche lagrangienne — voir Ambler, 2003).

On suppose une forme pour la fonction d'utilité qui satisfait les restrictions dont parlent King, Plosser et Rebelo (1988). Ceci permet l'existence d'un sentier de croissance équilibré où les agrégats comme l'output, la consommation et l'investissement augmentent au même rythme tandis que les heures travaillées per capita sont stationnaires. Il s'agit de fonctions d'utilité où lorsque le salaire réel augmente de façon permanente, l'effet de richesse et l'effet de substitution

sur l'offre de travail s'annulent, laissant l'offre de travail in affectée par le progrès technique.

Fonction d'utilité:

$$U = E_t \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \frac{(c_{t+i}^{1-\alpha} (1 - h_{t+i})^\alpha)^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma}$$

Contrainte budgétaire:

$$(1 - \tau_t)W_t h_t + (1 - \tau_t^k)R_t k_t = c_t + i_t$$

Le revenu du travail est taxé au tau  $\tau_t$ . Le revenu du capital est taxé au taux  $\tau_t^k$ .

Loi de mouvement du capital du ménage:

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t$$

Loi de mouvement du capital agrégé:

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t$$

Fonction de production agrégée:

$$Y_t = K_t^\theta (z_t H_t)^{(1-\theta)}$$

Prix en concurrence parfaite:

$$R_t = \theta z_t^{(1-\theta)} K_t^{(\theta-1)} H_t^{(1-\theta)},$$

$$W_t = (1 - \theta) z_t^{(1-\theta)} K_t^\theta H_t^{-\theta}$$

Loi de mouvement pour la technologie 1:

$$\ln z_t = \bar{z} + \rho \ln z_{t-1} + \varepsilon_t,$$

avec  $0 < \rho < 1$ . Ici, on suppose un processus stationnaire pour le niveau de la technologie. Loi de mouvement pour la technologie 2:

$$\ln z_t = \bar{z} + \ln z_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Rightarrow z_t = z_{t-1} e^{\varepsilon_t + \bar{z}}.$$

Ici, on suppose un processus de marche aléatoire avec dérive pour la technologie.

Autrement dit, le niveau de la technologie contient une **tendance stochastique**.

Pour un exemple d'un modèle RBC où la technologie contient une **tendance déterministe**, voir Cooley et Prescott (1995).

Contrainte budgétaire du gouvernement:

$$g_t = \tau_t W_t H_t + \tau_t^k R_t K_t$$

Pour simplifier, on suppose que le budget est équilibré en tout temps et qu'il n'y a pas de possibilité d'emprunt. La loi de mouvement des dépenses publiques est:

$$\ln(g_t/z_t) = \bar{g} + \rho_g \ln(g_{t-1}/z_{t-1}) + \varepsilon_t^g$$

On suppose ici un processus stochastique stationnaire pour les dépenses publiques **normalisées** par le niveau de la technologie. La justification est de permettre un sentier de croissance équilibré lorsque le niveau de la technologie lui-même n'est pas stationnaire. Pour simplifier, on suppose que le taux de taxation sur le revenu du travail est constant:

$$\tau_t = \tau.$$

Le taux de taxation sur le revenu du capital est endogène: il s'ajuste afin de garder le budget du gouvernement en équilibre étant donné le niveau des dépenses publiques et le revenu provenant de la taxation du revenu du travail. Il faut chercher une transformation du modèle de base qui rend **toutes** les variables stationnaires. On va diviser les variables non stationnaires du modèle par le niveau de la technologie. On obtient les équations transformées suivantes:

$$(1 - \tau_t)(W_t/z_t)h_t + (1 - \tau_t^k)R_t(k_t/z_t) = (c_t/z_t) + (i_t/z_t),$$

$$(k_{t+1}/z_{t+1})(z_{t+1}/z_t) = (1 - \delta)(k_t/z_t) + (i_t/z_t),$$

$$\Rightarrow (k_{t+1}/z_{t+1})e^{(\varepsilon_{t+1}+\bar{z})} = (1 - \delta)(k_t/z_t) + (i_t/z_t),$$

$$(K_{t+1}/z_{t+1})e^{(\varepsilon_{t+1}+\bar{z})} = (1 - \delta)(K_t/z_t) + (I_t/z_t),$$

$$(Y_t/z_t) = (K_t/z_t)^\theta H_t^{(1-\theta)},$$

$$R_t = \theta(K_t/z_t)^{(\theta-1)} H_t^{(1-\theta)},$$

$$(W_t/z_t) = (1 - \theta)(K_t/z_t)^\theta H_t^{-\theta}.$$

La transformation de la fonction d'utilité est un peu plus compliquée. Dans le cas spécial où  $\sigma$  tend vers un, nous obtenons une fonction d'utilité logarithmique:

$$U = E_t \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \{(1 - \alpha) \ln(c_{t+i}) + \alpha \ln(1 - h_{t+i})\}$$

Dans ce cas, nous pouvons écrire

$$U = E_t \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \{(1 - \alpha) \ln(c_{t+i}/z_{t+i}) + \alpha \ln(1 - h_{t+i})\} \\ + \left[ E_t \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \{(1 - \alpha) \ln(z_{t+i})\} \right].$$

Puisque  $\ln(z_{t+i})$  suit un processus de marche aléatoire avec dérive, sa croissance est d'ordre linéaire. En revanche,  $\beta^i$  décroît exponentiellement en  $i$ . Pour cette raison, la sommation infinie entre crochets doit être convergente. Du point de vue de l'individu, elle est exogène. Donc elle a pour effet d'affecter le niveau de l'utilité de l'individu sans affecter les conditions du premier ordre pour la

maximisation de l'utilité.

Dans le cas général, on a

$$U = E_t \sum_{i=0}^{\infty} [\beta^i (z_{t+i})^{(1-\alpha)(1-\sigma)}] \frac{((c_{t+i}/z_{t+i})^{(1-\alpha)} (1 - h_{t+i})^\alpha)^{(1-\sigma)} - 1}{1 - \sigma} + E_t \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \left[ \frac{(z_{t+i})^{(1-\alpha)(1-\sigma)} - 1}{1 - \sigma} \right].$$

Comme dans le cas précédent, la deuxième sommation infinie est un terme qui est exogène du point de vue de l'individu. Dans ce cas, il faut redéfinir le taux d'escompte, qui devient aléatoire et qui dépend de la réalisation du choc technologique. Définissons

$$\tilde{\beta}_i \equiv \beta^i (z_{t+i})^{(1-\alpha)(1-\sigma)}$$

Une condition suffisante pour que la fonction d'utilité soit une sommation infinie convergente est  $\sigma > 1$ .

Pour une variable quelconque  $x_t$  (à part  $\beta$ ), définissons  $\tilde{x}_t \equiv (x_t/z_t)$ . Du point de vue de l'individu, les états qui lui sont importants sont le niveau de la technologie  $z_t$ , le niveau des dépenses publiques, le stock de capital agrégé  $K_t$  et son propre stock de capital  $k_t$ . Puisqu'on normalise toutes les variables non stationnaires du modèle en divisant par  $z_t$ , la variable d'état qui est pertinente devient  $\varepsilon_t$  au lieu de  $z_t$ .

De cette façon, on peut écrire le problème de maximisation de l'individu à l'aide d'une équation de Bellman de la manière suivante:

$$V(\varepsilon_t, \tilde{g}_t, \tilde{K}_t, \tilde{k}_t) = \max_{h_t, \tilde{c}_t, \tilde{i}_t} \left\{ u(\tilde{c}_t, (1 - h_t)) + E_t \tilde{\beta} V(\varepsilon_{t+1}, \tilde{g}_{t+1}, \tilde{K}_{t+1}, \tilde{k}_{t+1}) \right\} \quad (1)$$

avec

$$\tilde{\beta} \equiv \beta(z_{t+1})^{(1-\alpha)(1-\sigma)}$$

La maximisation est sujette aux contraintes suivantes: la contrainte budgétaire, la loi de mouvement pour le capital de l'individu, les processus stochastiques qui engendrent  $\varepsilon_t$  et  $\tilde{g}_t$ . La solution à ce problème donne des règles de décision pour les variables de choix de l'individu:

$$\tilde{c}_t = c(\varepsilon_t, \tilde{g}_t, \tilde{K}_t, \tilde{k}_t),$$

$$\tilde{h}_t = h(\varepsilon_t, \tilde{g}_t, \tilde{K}_t, \tilde{k}_t),$$

$$\tilde{i}_t = i(\varepsilon_t, \tilde{g}_t, \tilde{K}_t, \tilde{k}_t),$$

Maintenant, nous définissons un **équilibre concurrentiel récursif** de la manière suivante: une fonction de valeur  $(\varepsilon_t, \tilde{g}_t, \tilde{K}_t, \tilde{k}_t)$ ; des règles de décision pour l'individu telles que l'ont vient de décrire; des règles de décision agrégées  $C(\varepsilon_t, \tilde{g}_t, \tilde{K}_t)$ ,  $H(\varepsilon_t, \tilde{g}_t, \tilde{K}_t)$  et  $I(\varepsilon_t, \tilde{g}_t, \tilde{K}_t)$ ; et des fonctions pour les prix de facteurs  $R_t = \theta \tilde{K}_t^{(\theta-1)} H_t^{(1-\theta)}$  et  $\tilde{W}_t = \theta \tilde{K}_t^\theta H_t^{-\theta}$ , tel que les fonctions satisfont:

1. le problème de maximisation de l'individu;
2. la maximisation des profits par les firmes;
3. la cohérence entre les règles de décision de l'individu et les règles de décision agrégées:

$$c(\varepsilon_t, \tilde{g}_t, \tilde{K}_t, \tilde{K}_t) = C(\varepsilon_t, \tilde{g}_t, \tilde{K}_t),$$

$$h(\varepsilon_t, \tilde{g}_t, \tilde{K}_t, \tilde{K}_t) = H(\varepsilon_t, \tilde{g}_t, \tilde{K}_t),$$

$$i(\varepsilon_t, \tilde{g}_t, \tilde{K}_t, \tilde{K}_t) = I(\varepsilon_t, \tilde{g}_t, \tilde{K}_t);$$

4. la contrainte de ressources agrégée

$$\tilde{C}_t + \tilde{I}_t + \tilde{g}_t = \tilde{Y}_t.$$

Puisque les contraintes du problème de l'individu sont linéaires,<sup>3</sup> nous pouvons résoudre le problème utilisant les techniques décrites en détail par Hansen et Prescott (1995). Il s'agit de calculer numériquement l'état stationnaire du modèle (après avoir étalonné ou estimé ses paramètres structurels). Ensuite, on calcule une approximation quadratique de la fonction d'utilité de l'individu, et on calcule numériquement les coefficients de la fonction de valeur, qui est elle-même une forme quadratique lorsque la fonction d'utilité est quadratique. Puis, on impose

---

<sup>3</sup>En fait, à cause de la transformation utilisée pour stationnariser les variables, la loi de mouvement du capital devient non linéaire à cause de la présence du terme  $(z_{t+1}/z_t)$  qui multiplie  $K_{t+1}$ . Il faut donc linéariser cette équation.

les conditions d'équilibre et on calcule l'équilibre concurrentiel récursif.

Afin de calculer les coefficients de la fonction de valeur, on peut employer la technique itérative suivante. La fonction de valeur est une forme quadratique. On initialise ses éléments en la mettant égale à une matrice négative semi-définie quelconque. Ensuite, on itère sur l'équation suivante. Prenant les éléments de la matrice  $V_i$  comme fixes, on maximise le côté droit de l'équation suivante (il faut aussi substituer les valeurs futures de  $k$ ,  $K$ , et  $g$  par leurs lois de mouvement). Lorsqu'on élimine les variables de contrôle à l'aide des CPO, on obtient une forme quadratique qui devient notre  $V_{i+1}$ . Nous avons laissé tomber l'opérateur d'espérance mathématique du côté droit de l'équation par rapport à l'équation (1): puisqu'on utilise une approximation quadratique, on peut invoquer le principe de **l'équivalent certain**. On répète cet exercice jusqu'à la convergence de la fonction de valeur. L'algorithme décrit en détail par Hansen et Prescott (1995) peut être simplifié si on a recours à une notation matricielle: pour une raison que j'ignore, Hansen et Prescott évitent soigneusement d'utiliser des matrices, ce qui rend leur chapitre un peu obscur.

$$V_{i+1}(\varepsilon_t, \tilde{g}_t, \tilde{K}_t, \tilde{k}_t) = \max_{h_t, \tilde{c}_t, \tilde{i}_t} \left\{ u(\tilde{c}_t, (1 - h_t)) + \beta V_i(\varepsilon_{t+1}, \tilde{g}_{t+1}, \tilde{K}_{t+1}, \tilde{k}_{t+1}) \right\}$$

Pour des techniques de résolution de modèles dynamiques autres que cette méthode basée sur une approximation quadratique à la fonction de valeur, voir Judd (1998).<sup>4</sup> Avec une approximation quadratique de la fonction d'utilité, les

<sup>4</sup>Nous avons déjà vu une autre méthode dans la première section du cours qui repose sur l'utilisation d'une approche lagrangienne avec une approximation du premier ordre des CPO au-

fonctions de réaction sont linéaires, et pour cette raison sont symétriques autour de l'état stationnaire. Il y a des modèles où les non-linéarités jouent un rôle important. L'utilisation de cette technique pour résoudre ces modèles serait inappropriée.

## **6 Vers une synthèse: les modèles du cycle avec maximisation et rigidités nominales**

On modifie les conditions d'équilibre afin de tenir compte du pouvoir de marché exercé par les firmes vis à vis des consommateurs et des travailleurs vis à vis des firmes.

## **7 Les modèles avec agents hétérogènes**

Avec le développement rapide de techniques de simulation numérique sur ordinateur, on peut utiliser les modèles dynamiques d'équilibre général pour répondre à des questions que l'on ne peut pas aborder avec des modèles à agent représentatif: l'offre de travail et la consommation à travers le cycle de vie; la distribution de la richesse et du revenu et son évolution dans le temps; l'impact sur les individus de réformes du système de sécurité sociale et des pensions de vieillesse; etc. Pour des survols récents, voir Rios Rull (1995, 1999).

Les modèles dynamiques d'équilibre général sont utilisés pour répondre à des  

---

tour de l'état stationnaire.

questions en finances publiques, en développement économique, en commerce international, et dans d'autres domaines encore. De plus en plus, la distinction entre la macroéconomie et la microéconomie est l'insistance de la théorie macroéconomique sur la modélisation en équilibre général.

## **8 Conclusion**

Nous venons seulement de gratter la surface de la littérature sur la modélisation du cycle économique.

## **Références**

Je n'inclus dans cette section que les références ne paraissant pas dans la bibliographie de Romer (1996).

Amato, Jeffery and Thomas Laubach (1999), "Monetary Policy in an Estimated Optimization-Based Model with Sticky Prices and Wages", working paper 99-09, Federal Reserve Bank of Kansas City

Ambler, Steve (2002), "Nominal Wage Rigidity as a Nash Equilibrium", cahier de recherche 0307, Centre interuniversitaire sur le risque, les politiques économiques et l'emploi

Ambler, Steve (2003), "Notes on the Forward-Backward Simulation Method", UQAM

<http://www.er.uqam.ca/nobel/r10735/9011/forbackd.pdf>

- Ambler, Steve, Alain Guay and Louis Phaneuf (1999), “Wage Contracts and Labor Adjustment Costs as Internal Propagation Mechanisms”, cahier de recherche 69, Centre de recherche sur l’emploi et les fluctuations économiques, UQAM
- Chari, V.V., Patrick Kehoe and Ellen McGrattan (2000), “Sticky Price Models of the Business Cycle: Can the Contract Multiplier Solve the Persistence Problem?”, *Econometrica*
- Cogley, Timothy and James M. Nason (1995), “Output Dynamics in Real-Business-Cycle Models”, *American Economic Review* 85, 492-511
- Cooley, Thomas F. (1995), *Frontiers in Business Cycle Research*. (Princeton, Princeton University Press)
- Cooley, Thomas F. and Gary D. Hansen (1989), “The Inflation Tax in a Real Business Cycle Model”, *American Economic Review* 79, 733-748
- Cooley, Thomas F. and Gary D. Hansen (1995), “Money and the Business Cycle”, in T. Cooley, ed., *Frontiers of Business Cycle Research*. (Princeton, Princeton University Press)
- Cooley, Thomas F. and Edward C. Prescott (1995), “Economic Growth and Business Cycles”, in T. Cooley, ed., *Frontiers of Business Cycle Research*. (Princeton, Princeton University Press)
- Danthine, Jean-Pierre (1998) “À la poursuite du Graal: le successeur d’IS-LM est-il identifié?”, *Actualité économique*
- Erceg, Christopher, Dale Henderson and Andrew Levin (2000), “Optimal Monetary Policy with Staggered Wage and Price Contracts”, *Journal of*

*Monetary Economics* 46, 281-313

- Goodfriend, Marvin et Robert King (1997), “The New Neoclassical Synthesis and the Role of Monetary Policy”, in Ben Bernanke and Julio Rotemberg, eds., *NBER Macroeconomics Annual 1997*. (Cambridge, MA, MIT Press)
- Guay, Alain et Pierre St-Amant (1997), “Do Hodrick-Prescott and Baxter-King Filters Provide a Good Approximation of Business Cycles?”, cahier de recherche 53, Centre de recherche sur l’emploi et les fluctuations économiques, UQAM
- Hansen, Gary D. and Edward C. Prescott (1995), “Recursive Methods for Computing Equilibria of Business Cycle Models”, in T. Cooley, ed., *Frontiers of Business Cycle Research*. (Princeton, Princeton University Press)
- Huang, Kevin and Zheng Liu (2002), “Staggered Price-Setting, Staggered Wage-Setting and Business Cycle Persistence”, *Journal of Monetary Economics* 49, 405-433
- Ireland, Peter (2002), “A Method for Taking Models to the Data”, Boston College
- Ireland, Peter (2001), “Sticky-Price Models of the Business Cycle: Specification and Stability”, *Journal of Monetary Economics*
- Judd, Kenneth (1998), *Numerical Methods in Economics*. Cambridge, MA, MIT Press
- King, Robert et Sergio Rebelo (1990), “Public Policy and Economic Growth: Developing Neoclassical Implications”, *Journal of Political Economy* 98, 126-150.

King, Robert et Sergio Rebelo (2000), “Resuscitating Real Business Cycle Models”, NBER working paper 7534, aussi dans John Taylor et Michael Woodford (éds.), *Handbook of Macroeconomics*. North Holland

<http://www.nber.org>

Phaneuf, Louis (1994), “Marché du travail et cycle économique: de la réalité aux modèles” *Interfaces* mai-juin, 42-50

Rotemberg, Julio and Michael Woodford (1997), “An Optimization-Based Econometric Framework for the Evaluation of Monetary Policy”, in Ben Bernanke and Julio Rotemberg, eds., *NBER Macroeconomics Annual 1997*. (Cambridge, MIT Press)

Rios-Rull, José Victor (1995), “Models with Heterogeneous Agents” in T. Cooley, ed., *Frontiers of Business Cycle Research*. (Princeton, Princeton University Press)

Rios-Rull, José Victor (1999), “Computation of Equilibria in Heterogeneous-Agent Models” in Ramon Marimon and Andrew Scott, eds., *Computational Methods for the Study of Dynamic Economies*. (Oxford, Oxford University Press)

Stock, James et Mark Watson (1990), “Business Cycle Properties of Selected U.S. Economic Time Series 1959-1988”, NBER working paper 3376

Stadler, George (1990), “Business Cycle Models with Endogenous Technology”, *American Economic Review* 80, 763-778

Cette version: 07/08/2008