Notes sur l'investissement

Steve Ambler
Département des sciences économiques
École des sciences de la gestion
Université du Québec à Montréal

automne 2005

Contents

1 Introduction

Dans ce chapitre du cours, nous allons mettre l'accent sur les aspects plus standard de la théorie. Je couvrirai en détail jusqu'à la section 8.6 du chapitre dans Romer (inclusivement). Vous êtes responsables de lire le reste du chapitre, mais il ne faut pas retenir les détails. Romer développe la théorie de l'investissement en présence de coûts d'ajustement en temps continu et en temps discret. On va se limiter à faire l'analyse en temps discret, puisque l'algèbre est un peu plus simple.

2 Investissement et coût du capital

Fonction de profits de la firme:

$$\pi\left(K, X_1, X_2, \ldots, X_n\right) - r_k K,$$

soit le revenu de la firme (net du coût des autres facteurs de production) moins le coût de louer son capital. Ici, les X_i sont des arguments exogènes de la fonction de revenu (prix de autres facteurs, prix de l'output, etc.). On suppose que

$$\pi_k > 0, \quad \pi_{kk} < 0.$$

Ainsi, la fonction de revenu est concave par rapport à l'intrant capital. La maximisation des profits a pour conséquence que la firme égalise le revenu marginal du capital à son coût de location:

$$\pi_k\left(K, X_1, X_2, \ldots, X_n\right) = r_k$$

Si on différencie cette CPO on obtient:

$$\pi_{kk}\left(K, X_1, X_2, \ldots, X_n\right) dK = dr_k$$

$$\rightarrow \frac{dK}{dr_k} = \frac{1}{\pi_{kk}} < 0.$$

Une augmentation du prix de location du capital incite la firme à en utiliser moins. Le probème ici est que la plupart des firmes possèdent leur propre stock de capital. Il n'y a pas vraiment de marché développé pour louer le capital. Quel est le *coût d'usage* du capital pour une firme qui possède son propre capital? Il s'agit d'un *coût d'opportunité* puisque la firme peut toujours revendre son capital.

Il y a trois éléments.

1. $r(t)p_k(t)$: le revenu d'intérêt engendré par la vente d'une unité du capital au prix $p_k(t)$.

2. $\delta p_k(t)$: le coût de la dépréciation.

3. $-\dot{p}_k(t)$: le gain en capital prévu si la firme retient l'unité de capital.

Nous avons:

$$r_k(t) = r(t)p_k(t) + \delta p_k(t) - \dot{p}_k(t)$$

$$= \left[r(t) + \delta - \frac{\dot{p}_k(t)}{p_k(t)}\right] p_k(t)$$

S'il existe un crédit à l'investissement qui donne un coût effictif de $(1 - f_\tau)p_k(t)$ au lieu de $p_k(t)$ nous avons:

$$r_k(t) = \left[r(t) + \delta - \frac{\dot{p}_k(t)}{p_k(t)}\right] (1 - f_\tau)p_k(t).$$

2.1 Difficultés

Cette théorie du coût du capital ne donne pas une théorie adéquate de *l'investissement*. Un changement discret du coût d'usage du capital mène à un changement discret de son stock de capital, ce qui revient à dire que le taux d'investissement de la firme devient infini pour un instant (si, bien sûr, on se permet de raisonner pour un instant en temps continu!).

L'avenir est capté seulement par le gain en capital prévu. En plus, il s'agit du gain en capital instantané à un moment donné. Le modèle ne capte pas l'impact sur l'investissement des anticipations. On pourrait penser que si la firme s'attend à ce qu'il y ait des conditions plus favorables dans une année, elle commencera tout de suite à ajuster son capital, surtout si l'ajustement de son capital est sujet à des coûts. Ceci nous mène à la section suivante.

3 Coûts d'ajustement et investissement

La firme maximise la valeur actualisée de ses profits, donnés par:

$$\Pi = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r}\right)^i \left[\pi\left(K_{t+i}\right)\kappa_{t+i} - I_{t+i} - C\left(I_{t+i}\right)\right],$$

où K_t est le stock de capital de l'industrie, κ_t est le stock de capital de la firme, I_t est l'investissement de la firme, et $C\left(I_t\right)$ est le coût d'ajustement du capital.

Notez bien.

1. Nous faisons la distinction entre le stock de capital de l'industrie et le stock de capital de la firme. Plus tard, afin d'analyser la dynamique de l'investissement, nous devrons confronter le problème *d'agrégation*, quelque chose que j'ai mentionné dans le chapitre sur la consommation mais que nous n'avons pas considéré jusqu'à maintenant.

2. Nous faisons l'hypothèse ici que le revenu de la firme est proportionnel à son stock de capital. Autrement dit, $\pi_{kk} = 0$, une hypothèse très différente par rapport à la section sur le coût du capital. Nous reviendrons à ce point plus tard dans cette section.

3. Nous faisons l'hypothèse de *coûts d'ajustement convexes*: $C(0) = 0, C'(0) = 0$, et $C''(\cdot) > 0$. Il est coûteux de réduire ou d'augmenter le stock de capital, et le coût marginal d'ajustement augmente avec l'ampleur de l'ajustement.

4. Par opposition à la section précédente, il n'y a pas de *prix relatif* du bien d'investissement dans cette équation. Implicitement, il n'y a pas de variation de prix relatif de l'output de la firme par rapport au bien d'investissement acheté par la firme. Par contre, la présence des coûts d'ajustement va introduire un écart entre le prix (du point de vue de la firme) d'une unité de capital *achetée* et une unité de capital *installée*. Ce prix relatif va paraître dans le problème de maximisation de la firme ci-dessous comme le multiplicateur de Lagrange du problème.

Le stock de capital de la firme est sujet à la loi de mouvement suivant:

$$\kappa_{t+1} = \kappa_t + I_t$$

On fait abstraction ici de la dépréciation. Le Lagrangien pour le problème de maximisation de la firme est:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r}\right)^i \left(\pi\left(K_{t+i}\right)\kappa_{t+i} - I_{t+i} - C\left(I_{t+i}\right) + q_{t+i}\left(\kappa_{t+i} + I_{t+i} - \kappa_{t+i+1}\right)\right)$$

Notez bien.

1. Le multiplicateur de Lagrange, q_{t+i}, a l'interprétation de la valeur marginale d'une unité supplémentaire de capital *installée* en t, mesurée du point de vue de la période $t + i$.

2. Le stock de capital κ_t est fixe en début de pèriode t. Ce que la firme peut choisir en t est κ_{t+1}.

3. Pour l'instant, nous faisons abstraction de l'incertitutde.

La CPO par rapport à l'investissement en t donne:

$$-1 - C'(I_t) + q_t = 0$$

Nous obtenons

$$q_t = 1 + C'(I_t)$$
$$\Rightarrow I_t = f(q_t).$$

L'investissement ne dépend que de la valeur marginale d'une unité de capital installée. Lorsque $q_t = 1$, nous avons $I_t = 0$ (pourquoi?).

La CPO pour le choix du capital en $t+1$ donne:

$$\frac{1}{1+r}\left[\pi(K_{t+1}) + q_{t+1}\right] = q_t$$

Ceci donne:

$$\pi(K_{t+1}) = rq_t - \Delta q_{t+1}$$

Du côté gauche nous avons le revenu du produit marginal du capital. Du côté droit nous avons le coût d'opportunité d'une unité de capital. Lorsque l'horizon tend vers l'infini:

$$\lim_{i\to\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^i q_{t+i}\kappa_{t+i} = 0. \tag{1}$$

Ceci reflète le fait que, si la firme a un horizon de planification fini, elle veut réduire la valeur actualisée de son capital à zéro avant de cesser ses activités. Si la dernière période d'opérations de la firme est la période T, nous avons:

$$\left(\frac{1}{1+r}\right)^{(T-t)} q_T\kappa_T = 0.$$

Si on transforme de manière appropriée les indices du temps et si on prend la limite lorsque i tend vers l'infini, on obtient l'équation (**??**).

3.1 Agrégation et analyse du modèle

Nous allons analyser la dynamique du stock de capital et de q_t pour *une industrie* donnée.[1] Pourquoi ne peut-on pas analyser la dynamique du stock de capital pour

[1] La façon la plus simple de justifier l'hypothèse que le revenu de la firme individuelle dépend de façon négative du stock de capital de l'industrie serait une courbe de demande à pente négative pour l'output de l'industrie comme fonction du prix relative de son output. S'il n'y a q'une seule industrie dans l'économie, on peut appliquer cette analyse à la dynamique du stock de capital agrégé. Dans ce cas, la façon la plus simple de justifier l'hypothèse serait la présence d'un autre facteur de production (par exemple le travail) dont la courbe d'offre n'est pas infiniment élastique pour l'économie entière.

une *firme*? Si le revenu réel de la firme est proportionnelle au stock de capital de la firme, sa taille n'est pas bien déterminée. Si on revient en arrière à la section précédente du chapitre, nous avons:

$$\frac{dK}{dr_k} = \frac{1}{\pi_{kk}}.$$

Avec $\pi_{kk} = 0$, cette dérivée n'est pas bien définie. Si on agrège la fonction d'investissement à travers les N firmes dans l'industrie (on prend le nombre de firmes comme exogène) nous obtenons:

$$\Delta K_t = Nf\left(q_t\right), \quad f(1) = 0, \quad f'(\cdot) > 0,$$

où la fonction $f(\cdot)$ est définie ci-dessus. Dans ce cas, l'agrégation est facile. L'investissement de l'industrie est simplement N fois l'investissement d'une firme représentative dans l'industrie. Notez que nous faisons abstraction de la question importante de l'entrée et de la sortie de firmes du marché. La dynamique du capital face à des variations de q_t est assez facile à comprendre. Nous pouvons écrire:

$$\Delta q_t = rq_t - \pi(K_{t+1})$$

avec $\pi'(K_{t+1}) < 0$.

Notez que le taux de changement de q_t dépend du niveau du stock de capital en $t+1$. Ceci est un peu embêtant. Avec une analyse en temps continu, les taux de changement des variables en t dépendent de leurs niveaux en t. Nous allons négliger ce petit détail technique en analysant le portrait de phase du système. Voir la discussion dans le manuel suivant l'équation (8.14).

Ceci mène au *portrait de phase* suivant.

[PORTRAIT DE PHASE ICI]. Voir le *Graphique 8.3* du livre.

Nous pouvons comprendre la dynamique de q_t décrite par cette équation de la manière suivante. La ligne $\Delta q = 0$ nous donne le niveau de q_t auquel la firme est contente de détenir l'unité marginal de capital même en l'absence de gains en capital. À droite de la ligne $\Delta q = 0$, le stock de capital est plus élevé pour un niveau donné de q_t. Puisque le revenu du produit marginal du capital dépend de façon négative du stock, le revenu marginal est moins élevé qu'à un point sur la ligne. Pour compenser, et pour que la firme accepte néanmoins de détenir l'unité marginale de capital, il faut que le coût d'opportunité de la détenir baisse. Ce qui fait baisser ce coût d'opportunité est un gain en capital positif ($\Delta q > 0$). Donc, cette équation a l'interprétation d'une condition d'arbitrage, une relation entre le niveau de q_t et son taux de changement qui fait en sorte que la firme accepte de détenir l'unité marginale de capital.

3.2 Incertitude et investissement

Utilisons le cadre d'analyse que nous venons de développer pour investiguer ce qui arrive face à un choc positif futur qui est *incertain*.

[PORTRAIT DE PHASE ICI]. Voir le *Graphique 8.10* du livre.

3.3 Irréversibilité et investissement

Qu'est-ce qui arrive dans ce modèle s'il est plus coûteux de faire baisser le stock de capital que de le faire augmenter? On garde l'hypothèse de coûts d'ajustement convexes, mais on suppose que la fonction de coûts d'ajustement est *asymétrique* autour du point où l'investissement brut est nul.

[PORTRAIT DE PHASE ICI]. Voir le *Graphique 8.11* du livre.

On investit *moins* face à la possibilité d'un choc favorable futur. Il y a une *valeur d'option* d'attendre avant d'investir.

3.4 Difficultés

Tel que souligné par Cooper et Haltiwanger (2000) et d'autres, l'investissement ne se comporte pas empiriquement comme notre théorie prédit. Dans les données, l'investissement est moins graduel suite à des chocs exogènes. Des fois, l'investissement ne répond pas du tout à de petits chocs. Ceci suggère qu'il y a des coûts d'ajustement mais que ceux-ci ne sont pas forcément convexes. Il y a probablement des coûts fixes importants aussi, ce qui empêchent les firmes de réagir aux petits chocs. Cooper et Haltiwanger (2000) et d'autres ont travaillé sur des formes fonctionnelles pour les coûts d'ajustement qui donnent des prédictions plus conformes aux données.

cette version: **05/09/2005**