

# Le modèle néo-keynésien de base

Steve Ambler\*

Département des sciences économiques

École des sciences de la gestion

Université du Québec à Montréal ©2008: Steve Ambler

Automne 2008

## Contents

<b>1 Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2 Le modèle linéarisé</b>	<b>2</b>
<b>3 Demande des biens intermédiaires</b>	<b>5</b>
<b>4 Firme monopolistique</b>	<b>7</b>
4.1 Contrats de Calvo . . . . .	9
4.2 Problème dynamique de la firme . . . . .	12
4.3 Dérivation de la courbe de Phillips néo-keynésienne . . . . .	13

---

\*Ce texte est un premier brouillon. J'invite vos commentaires afin de pouvoir améliorer la qualité du produit. Veuillez signaler toute erreur ou omission à [ambler.steven@uqam.ca](mailto:ambler.steven@uqam.ca)

<b>5</b>	<b>Relation entre coût marginal et output gap</b>	<b>17</b>
5.1	Cas spéciaux . . . . .	22
5.2	Discussion . . . . .	23
<b>6</b>	<b>La courbe IS</b>	<b>25</b>
<b>7</b>	<b>Comment modéliser la politique monétaire?</b>	<b>27</b>
<b>8</b>	<b>Les chocs</b>	<b>29</b>

## 1 Introduction

Buts de ce chapitre:

1. Dériver les équations de base du modèle néo-keynésien.

## 2 Le modèle linéarisé

Notre but est d'arriver à ce système de 2 équations linéarisées:

$$\pi_t = \beta E_t \pi_{t+1} + \varphi y_t, \quad (1)$$

$$y_t = E_t y_{t+1} + \frac{1}{1+r} (i_t - E_t \pi_{t+1}), \quad (2)$$

avec la notation qui suit:

- $\pi_t$  – la déviation de l’inflation par rapport à sa valeur à l’état stationnaire, qui par hypothèse est égale à zéro;
- $y_t$  – la déviation en logs de l’output par rapport à son niveau “naturel”, le niveau qui s’appliquerait en l’absence de rigidités nominales (le soi-disant “output gap”);
- $0 < \beta < 1$  – le taux d’escompte du ménage représentatif;
- $\varphi$  – un paramètre positif dont la dépendance par rapport aux paramètres structurels sera élaborée plus loin;
- $i_t$  – le taux d’intérêt nominal de court terme (rendement nominal certain entre  $t$  et  $t + 1$ ).

Plusieurs remarques sont pertinentes.

- Le modèle est très simple. Les inconnus sont le taux d’inflation et l’output gap.
- La première équation est une courbe d’offre agrégée. Elle découle du comportement optimal de firmes qui fixent leurs prix sur plusieurs périodes. Elle porte le nom de “courbe de Phillips néo-keynésienne” (New Keynesian Phillips curve”).
- Afin d’introduire des firmes qui choisissent leurs prix de façon optimale, il faut laisser tomber l’hypothèse de concurrence parfaite sur le marché des biens et services. On la remplace avec une hypothèse de “concurrence

monopolistique”, où chaque firme choisit son prix en supposant exogène les prix choisies par ses concurrents et aussi en supposant exogène l’indice des prix agrégé et l’output agrégé.

- La deuxième équation est une courbe de demande agrégée. Elle découle du comportement optimal du ménage représentatif. Il s’agit d’une linéarisation de son équation d’Euler par rapport au choix de la quantité d’obligations de court terme.
- On suppose que le taux d’intérêt nominal de court terme,  $i_t$ , est l’instrument de la banque centrale pour la conduite de sa politique monétaire. On peut compléter le modèle en ajoutant une fonction de réaction pour le taux d’intérêt (par exemple la soi-disant “Règle de Taylor”) ou en ajoutant une fonction de bien-être social et en supposant que la banque centrale choisit le taux d’intérêt afin de maximiser le bien-être économique.
- Il n’y a pas de monnaie (d’encaisses) dans ce modèle “monétaire”. On pourrait supposer une fonction d’utilité pour le ménage que dépend des encaisses réelles de manière **séparable**. Dans ce cas, les encaisses seraient présentes dans la CPO pour le choix du ménage quant à la quantité d’encaisses, mais ne paraîtraient dans aucune autre condition d’équilibre du modèle. On pourraient trouver la valeur des encaisses réelles de manière récursive après avoir résolu le reste du modèle. À ce sujet voir Woodford (2003).

- La rigidité nominale est une rigidité des prix. Par hypothèse, les salaires sont flexibles et le marché du travail est concurrentiel. Donc, il n'y a pas de chômage dans ce modèle. Pour une analyse du chômage, voir le dernier chapitre du cours.
- En principe au moins, le modèle est conçu afin de pouvoir expliquer l'impact important et persistant de la politique monétaire sur l'activité réelle. Les firmes choisissent leurs prix de façon **chevauchée**. Les firmes qui choisissent leur prix en  $(t + 1)$  sont influencées par le choix des firmes ayant choisis leurs prix en  $t$ , et de cette façon un choc qui a lieu en période  $T$  a des effets qui sont propagés en  $(t + 1)$ . Nous allons voir par la suite si le modèle est capable de livrer la marchandise.

### 3 Demande des biens intermédiaires

La consommation agrégée est un indice de biens individuels:

$$c_t = \left[ \int_0^1 c_t(z)^{(\mu-1)/\mu} dz \right]^{\mu/(\mu-1)}. \quad (3)$$

Il y a une masse unitaire de biens individuels, produits chacun par une seule firme. On peut supposer l'existence d'un secteur de production du bien final  $c_t$  qui est concurrentiel, ou on peut supposer que le ménage lui-même aime la variété et que l'indice rentre directement dans la fonction d'utilité. Les deux hypothèses mènent aux mêmes conditions d'équilibre.

Nous pouvons analyser la demande des biens individuels en supposant que la firme concurrentielle qui produit le bien final (ou le ménage dans l'interprétation alternative) minimise le coût d'acheter ou de produire le panier de biens  $c_t$ . Le problème peut s'écrire:

$$\min_{c_t(z), P_t} \int_0^1 P_t(z) c_t(z) dz + P_t \left( c_t - \left[ \int_0^1 c_t(z)^{(\mu-1)/\mu} dz \right]^{\mu/(\mu-1)} \right). \quad (4)$$

J'ai choisi d'écrire le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte pour capter l'idée qu'il s'agit d'un indice des prix. L'interprétation de  $P_t$  est le coût nominal d'augmenter la taille du panier de biens ou du bien final  $c_t$  par une unité. La CPO pour le choix du bien individuel représentatif  $c_t(z)$  est:

$$P_t(z) - P_t \frac{\mu}{(\mu-1)} \left[ \int_0^1 c_t(z)^{(\mu-1)/\mu} dz \right]^{\mu/(\mu-1)-1} \frac{(\mu-1)}{\mu} c_t(z)^{-1/\mu} = 0.$$

Cette équation se simplifie énormément, On peut l'écrire:

$$\begin{aligned} \frac{P_t(z)}{P_t} &= \left( \left[ \int_0^1 c_t(z)^{(\mu-1)/\mu} dz \right]^{\mu/(\mu-1)} \right)^{1/\mu} c_t(z)^{-1/\mu} \\ &\Rightarrow \frac{P_t(z)}{P_t} = \left( \frac{c_t(z)}{c_t} \right)^{-1/\mu} \\ &\Rightarrow c_t(z) = c_t \left( \frac{P_t(z)}{P_t} \right)^{-\mu}. \end{aligned} \quad (5)$$

La demande du bien individuel est proportionnelle à la consommation agrégée et dépend de façon inverse de son prix relatif par rapport à  $P_t$ . (Exercice — montrez

que l'élasticité de la demande par rapport à  $P_t(z)$  est constante et égale à  $-\mu$ .)

Substituant cette équation de demand dans la définition de l'indice  $c_t$ , nous

obtenons:

$$\begin{aligned}
 c_t &= \left[ \int_0^1 \left( c_t \left( \frac{P_t(z)}{P_t} \right)^{-\mu} \right)^{(\mu-1)/\mu} dz \right]^{\mu/(\mu-1)} \\
 &= \left( \int_0^1 P_t(z)^{1-\mu} dz \right)^{\mu/(\mu-1)} c_t P_t^\mu \\
 \Rightarrow 1 &= \left( \int_0^1 P_t(z)^{1-\mu} dz \right)^{\mu/(\mu-1)} P_t^\mu \\
 \Rightarrow P_t &= \left( \int_0^1 P_t(z)^{1-\mu} dz \right)^{1/(1-\mu)}. \tag{6}
 \end{aligned}$$

## 4 Firme monopolistique

Analysons d'abord le problème d'une firme qui peut choisir chaque période son prix. Son problème est statique. Elle doit maximiser son profit réel en choisissant son prix  $P_t(z)$ . On peut écrire son problème de la manière suivante:

$$\max_{P_t(z)} q_t(z) = \left[ \frac{P_t(z)}{P_t} c_t(z) - \phi(c_t(z)) \right].$$

Ici,  $q_t(z)$  est son profit réel, et  $\phi(c_t(z))$  est sa fonction de coût réel. La forme exacte de la fonction de coût n'est pas importante pour l'instant. Nous reviendrons sur sa forme dans la section ci-dessous qui analyse le lien entre le coût marginal et l'output gap. En calculant sa CPO, il faut tenir compte du fait

que son prix influence sa demande  $c_t(z)$  puisqu'elle tient compte de la fonction de demande que nous avons dérivée dans la section précédente. Nous pouvons écrire sa CPO de la manière suivante:

$$\frac{\partial q_t(z)}{\partial P_t(z)} = 0 = \frac{1}{P_t} c_t(z) + \frac{P_t(z)}{P_t} \frac{\partial c_t(z)}{\partial P_t(z)} - \frac{\partial \phi(c_t(z))}{\partial c_t(z)} \frac{\partial c_t(z)}{\partial P_t(z)}.$$

Écrivons:

$$\frac{\partial \phi(c_t(z))}{\partial c_t(z)} \equiv \psi_t(z)$$

qui est donc le coût marginal réel de la firme  $z$  (je l'écris avec un indice du temps pour souligner le fait qu'il peut varier). Nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{P_t} c_t(z) + \frac{1}{P_t} c_t(z) \left( \frac{\partial c_t(z)}{\partial P_t(z)} \frac{P_t(z)}{c_t(z)} \right) - \psi_t(z) \left( \frac{\partial c_t(z)}{\partial P_t(z)} \frac{P_t(z)}{c_t(z)} \right) \frac{c_t(z)}{P_t(z)} \\ &= \frac{1}{P_t} c_t(z) (1 - \mu) + \mu \psi_t(z) \frac{c_t(z)}{P_t(z)} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\Rightarrow \mu \psi_t(z) \frac{1}{P_t(z)} = (\mu - 1) \frac{1}{P_t}$$

$$\Rightarrow \frac{P_t(z)}{P_t} = \frac{\mu}{(\mu - 1)} \psi_t(z). \quad (8)$$

Ici, j'ai remplacé  $\left( \frac{\partial c_t(z)}{\partial P_t(z)} \frac{P_t(z)}{c_t(z)} \right)$  par  $-\mu$ . Son prix relatif donné par  $\frac{P_t(z)}{P_t}$  est une "marge ajoutée" ("markup") sur son coût marginal réel de production, et la marge est un facteur constant égal à

$$\frac{\mu}{(\mu - 1)} > 1.$$

Si toutes les firmes sont identiques, ce qui sera le cas si elles ont des fonctions de production identiques avec rendements constants à l'échelle et si elles n'ont pas de facteurs de productions fixes ou quasi-fixes (par "quasi-fixes" j'entends par exemple des stocks de capital qui sont prédéterminés à la période  $t$  et qui dépendent de l'investissement passé, qui peut être différent de firme en firme — s'il existe un marché de location du capital et si celui-ci est parfaitement mobile entre les firmes, on évite ce problème), on a

$$P_t(z) = P_t \quad \forall z \quad \psi_t(z) = \frac{(\mu - 1)}{\mu} < 1.$$

Les firmes produiraient un output inférieur à celui en concurrence parfaite, ou le prix doit être **égal** au coût marginal de production. Notez que lorsque l'élasticité de substitution  $\mu$  augment, on s'approche de plus en plus à une situation de concurrence parfaite. Nous avons:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\mu}{(\mu - 1)} = 1.$$

## 4.1 Contrats de Calvo

Passons maintenant à la situation où les firmes fixent leurs prix pour plusieurs périodes. En fait, on fait ici une hypothèse, due à Calvo (1983), qu'au début de chaque période chaque firme a une probabilité constante égale à  $(1 - \kappa)$  de pouvoir ajuster son prix. Donc, avec une probabilité de  $\kappa$  son prix doit rester constant. Cette hypothèse, comme on va voir tout de suite, va nous faciliter la vie

énormément en permettant une simplification considérable des équations dynamiques. Puisqu'il y a par hypothèse une masse unitaire de firmes, on a :

- le nombre de firmes ajustant leurs prix en  $t$ :  $(1 - \kappa)$ ;
- le nombre de firmes en  $t$  ayant ajusté leurs prix en  $(t - 1)$ :  $\kappa(1 - \kappa)$ ;
- le nombre de firmes en  $t$  ayant ajusté leurs prix en  $(t - 2)$ :  $\kappa^2(1 - \kappa)$ ;
- ...

Nous avons :

$$(1 - \kappa) \sum_{i=0}^{\infty} \kappa^i = 1.$$

En principe, une firme malchanceuse pourrait ne jamais avoir le privilège de réajuster son prix, et dans l'économie il y aura un petit nombre de firmes qui n'ont pas ajusté leurs prix depuis fort longtemps.

Maintenant, si on suppose encore que toutes les firmes ont des fonctions de production identiques et qu'il n'y a pas de facteurs fixes, toutes les firmes d'une cohorte de firmes donnée choisiront le même prix. Nous pouvons réécrire l'indice exact des prix de la manière suivante :

$$P_t = \left( \int_0^1 P_t(z)^{1-\mu} dz \right)^{1/(1-\mu)}$$

$$\Rightarrow P_t^{(1-\mu)} = (1 - \kappa)P_t^{*(1-\mu)} + \kappa(1 - \kappa)P_{t-1}^{*(1-\mu)} + \kappa^2(1 - \kappa)P_{t-2}^{*(1-\mu)} + \dots$$

où  $P_t^*$  est le prix optimal choisi par chacune des firmes ajustant son prix en  $t$ .

Nous pouvons simplifier. Prenons le premier retard de cette équation et

multiplions des deux côtés par  $\kappa$ . Nous avons:

$$\Rightarrow \kappa P_{t-1}^{(1-\mu)} = \kappa(1-\kappa)P_{t-1}^{*(1-\mu)} + \kappa^2(1-\kappa)P_{t-2}^{*(1-\mu)} + \dots$$

Maintenant, si on soustrait cette équation de l'équation précédente, on obtient:

$$P_t^{(1-\mu)} - \kappa P_{t-1}^{(1-\mu)} = (1-\kappa)P_t^{*(1-\mu)}.$$

Il s'agit d'une équation de différence première non linéaire. C'est le genre d'équation que nous pourrions programmer directement dans *DYNARE*. De façon alternative, nous pouvons la linéariser de la manière suivante:

$$(1-\mu)P^{-\mu}(P_t - P) = (1-\kappa)(1-\mu)P^{-\mu}(P_t^* - P) + \kappa(1-\mu)P^{-\mu}(P_{t-1} - P).$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{(P_t - P)}{P} &= (1-\kappa)\frac{(P_t^* - P)}{P} + \kappa\frac{(P_{t-1} - P)}{P} \\ \Rightarrow \hat{p}_t &= (1-\kappa)\hat{p}_t^* + \kappa\hat{p}_{t-1}, \end{aligned} \tag{9}$$

où les variables avec des chapeaux sont par définition mesurées en déviations proportionnelles par rapport à leurs valeurs à l'état stationnaire.<sup>1</sup> Cette équation dit que le niveau des prix, jusqu'à une approximation du premier ordre, est une

---

<sup>1</sup>Pour dériver cette équation linéarisée, j'ai fait l'hypothèse que le niveau des prix est stationnaire et qu'à long terme,  $P^* = P$ . La dernière hypothèse dépend fortement de la linéarisation se fait autour d'un état stationnaire où le taux d'inflation de long terme (tendantiel) est zéro. L'hypothèse de stationnarité des prix est assez forte, et en fait pourrait dépendre du comportement de la banque centrale. Si les prix étaient non stationnaires, il faudrait en principe les normaliser de la bonne façon avant de linéariser, mais pensons à ces quelques lignes d'algèbre comme un raccourci.

moyenne pondérée du prix choisi par les firmes qui ajustent leurs prix en  $t$  et du niveau des prix de la période  $(t - 1)$ . Le fait de pouvoir réduire l'équation pour l'évolution du niveau des prix à une expression aussi simple dépend de l'hypothèse des contrats de prix à la Calvo.

## 4.2 Problème dynamique de la firme

La firme  $z$  qui choisit son prix en  $t$  a maintenant un horizon infini, puisque il y a une probabilité  $\kappa^i$  que son prix sera encore en vigueur en  $(t + i)$ . Comme nous avons vu dans le cadre des modèles de cycles réels, elle va pondérer ses profits futurs utilisant l'utilité marginale de la consommation du ménage représentatif (que nous allons écrire comme  $\lambda_{t+i}$ ) et elle va actualiser utilisant le taux d'escompte du ménage représentatif (que nous allons écrire comme  $\beta$ ). De cette façon, son choix va lui permettre de maximiser la valeur de ses actions en bourse. On peut écrire son problème de maximisation de la manière suivante:

$$\max_{P_t(z)} E_t \sum_{i=0}^{\infty} (\beta \kappa)^i \lambda_{t+i} q_{t+i}(z).$$

Il ne faut pas penser à  $\lambda_{t+i}$  ici comme des multiplicateurs associés à des contraintes sur le problème de la firme. Je souligne le fait qu'il s'agit d'utilités marginales de la consommation du point de vue du ménage représentatif. Par analogie avec le problème statique (et c'est facile de le montrer), la dérivée des profits  $q_{t+i}(z)$  par rapport à  $P_t(z)$  a la même forme fonctionnelle que dans

l'équation (7), et nous pouvons écrire directement:

$$E_t \sum_{i=0}^{\infty} (\beta\kappa)^i \lambda_{t+i} \left( \frac{1}{P_{t+i}} c_{t+i}(z) (1 - \mu) + \mu \psi_{t+i}(z) \frac{c_{t+i}(z)}{P_t(z)} \right) = 0. \quad (10)$$

### 4.3 Dérivation de la courbe de Phillips néo-keynésienne

La courbe de Phillips découle directement de l'équation (10), mais le chemin est assez long et il est un peu ardu. Allons-y par petits pas.

Le premier pas est de substituer les  $c_{t+i}(z)$  dans la CPO utilisant l'équation de demande que nous avons dérivée dans la section 3. Nous avons:

$$0 = E_t \sum_{i=0}^{\infty} (\beta\kappa)^i \lambda_{t+i} \left( (1 - \mu) \frac{c_{t+i}}{P_{t+i}} \left( \frac{P_t^*}{P_{t+i}} \right)^{-\mu} + \mu \psi_{t+i} \frac{1}{P_t^*} c_{t+i} \left( \frac{P_t^*}{P_{t+i}} \right)^{-\mu} \right).$$

J'ai utilisé le fait que (étant données nos hypothèses) toutes les firmes qui

ajustent leurs prix en  $t$  choisissent le même prix optimal et donc  $P_t(z) = P_t^*$ .

Maintenant, supposons une fonction d'utilité logarithmique et séparable entre la consommation et ses autres arguments. Si tel est le cas, nous avons  $\lambda_{t+i} = \frac{1}{c_{t+i}}$  et nous avons une première simplification. Nous pouvons écrire:

$$0 = E_t \sum_{i=0}^{\infty} (\beta\kappa)^i \left( \frac{1}{P_{t+i}} \left( \frac{P_t^*}{P_{t+i}} \right)^{-\mu} + \frac{\mu}{(1 - \mu)} \psi_{t+i} \frac{1}{P_t^*} \left( \frac{P_t^*}{P_{t+i}} \right)^{-\mu} \right).$$

Maintenant, il faut calculer une approximation de Taylor d'ordre un. Comme d'habitude, je néglige les termes d'ordre zéro qui doivent de toute façon s'annuler si la CPO est satisfaite.

La prochaine étape est de linéariser cette équation. J'utilise ma méthode préférée, qui revient à linéariser en niveaux et par la suite de diviser par des valeurs à l'état stationnaire afin d'exprimer les variables en déviations proportionnelles par rapport à l'état stationnaire. Nous avons:

$$0 = E_t \sum_{i=0}^{\infty} (\beta \kappa)^i \left\{ (1 - \mu) \left( \frac{P^*}{P} \right)^{-\mu} \left( \frac{1}{P} (P_t^* - P) - \frac{P^*}{P^2} (P_{t+i} - P) \right) \right. \\ \left. + - \frac{\mu}{(1 - \mu)} \psi \left( \frac{P^*}{P} \right)^{-(\mu+1)} \left( \frac{1}{P} (P_t^* - P) - \frac{P^*}{P^2} (P_{t+i} - P) \right) \right. \\ \left. + \frac{\mu}{(1 - \mu)} \left( \frac{P^*}{P} \right)^{-\mu} (\psi_{t+i} - \psi) \right\}.$$

Nous pouvons simplifier cette équation en tenant compte des restrictions suivantes.

1. Puisque l'inflation est nulle à long terme, il faut que  $P^* = P$ .
2. À long terme en l'absence de chocs, nous retrouvons la relation entre prix relatif et coût marginal donnée par l'équation (8) (sans, bien sûr, les indices du temps), et pour cette raison il faut que  $-\frac{\mu}{(1-\mu)}\psi = 1$ .

Nous obtenons ainsi:

$$0 = E_t \sum_{i=0}^{\infty} (\beta \kappa)^i \left\{ (1 - \mu) \left( \frac{(P_t^* - P)}{P} - \frac{(P_{t+i} - P)}{P} \right) \right. \\ \left. + \mu \left( \frac{(P_t^* - P)}{P} - \frac{(P_{t+i} - P)}{P} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\mu}{(1-\mu)} (\psi_{t+i} - \psi) \Big\} \\
\Rightarrow 0 &= E_t \sum_{i=0}^{\infty} (\beta\kappa)^i \left\{ \frac{(P_t^* - P)}{P} - \frac{(P_{t+i} - P)}{P} - \frac{(\psi_{t+i} - \psi)}{\psi} \right\} \\
&= E_t \sum_{i=0}^{\infty} (\beta\kappa)^i \left\{ \left( \frac{(P_t^* - P)}{P} - \frac{(P_t - P)}{P} \right) - \left( \frac{(P_{t+i} - P)}{P} - \frac{(P_t - P)}{P} \right) - \frac{(\psi_{t+i} - \psi)}{\psi} \right\} \\
&\Rightarrow \frac{1}{(1-\beta\kappa)} (\hat{p}_t^* - \hat{p}_t) = E_t \sum_{i=0}^{\infty} (\beta\kappa)^i (\hat{p}_{t+i} - \hat{p}_t + \hat{\psi}_{t+i}) \\
&\Rightarrow (\hat{p}_t^* - \hat{p}_t) = (1-\beta\kappa) E_t \sum_{i=0}^{\infty} (\beta\kappa)^i (\hat{p}_{t+i} - \hat{p}_t + \hat{\psi}_{t+i}). \quad (11)
\end{aligned}$$

Comme auparavant, les variables en minuscules avec des chapeaux sont mesurées en déviations proportionnelles par rapport aux valeurs à l'état stationnaire.

Nous sommes (ou presque) au bout de nos peines. Prenons quelques minutes pour réfléchir à l'intuition de cette équation. Elle nous dit que le prix relatif optimal est une moyenne pondérée des niveaux de prix futurs anticipés (par rapport au niveau des prix courant) plus la déviation du coût marginal réel de production. La firme tient compte de l'évolution anticipée du niveau des prix et de l'évolution anticipée de ses coûts lorsqu'elle établit son prix.

Il nous reste à éliminer  $\hat{p}_t^*$  de l'équation et de se débarrasser de la somme infinie pour la remplacer par une équation de différence première. L'équation (9) nous permet d'éliminer  $\hat{p}_t^*$ . Nous avons:

$$\hat{p}_t^* = \frac{1}{(1-\kappa)} \hat{p}_t - \frac{\kappa}{(1-\kappa)} \hat{p}_{t-1}.$$

Substituant, nous obtenons:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-\kappa)}\hat{p}_t - \frac{\kappa}{(1-\kappa)}\hat{p}_{t-1} &= (1-\beta\kappa)E_t \sum_{i=0}^{\infty} (\beta\kappa)^i \left( \hat{p}_{t+i} + \hat{\psi}_{t+i} \right) \\ &= (1-\beta\kappa)E_t \left( \hat{p}_t + \hat{\psi}_t + (\beta\kappa) \left( \hat{p}_{t+1} + \hat{\psi}_{t+1} \right) + \dots \right). \end{aligned}$$

Avançant cette équation par une période, multipliant par  $(\beta\kappa)$  et appliquant l'opérateur d'espérance conditionnelle  $E_t$  nous obtenons:

$$\begin{aligned} \frac{\beta\kappa}{(1-\kappa)}E_t\hat{p}_{t+1} - \frac{\beta\kappa^2}{(1-\kappa)}\hat{p}_t \\ = (1-\beta\kappa)E_t \left( (\beta\kappa) \left( \hat{p}_{t+1} + \hat{\psi}_{t+1} \right) + (\beta\kappa)^2 \left( \hat{p}_{t+2} + \hat{\psi}_{t+2} \right) + \dots \right). \end{aligned}$$

Soustrayant cette équation de celle qui précède, nous obtenons:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-\kappa)}\hat{p}_t - \frac{\kappa}{(1-\kappa)}\hat{p}_{t-1} - \frac{\beta\kappa}{(1-\kappa)}E_t\hat{p}_{t+1} + \frac{\beta\kappa^2}{(1-\kappa)}\hat{p}_t \\ = (1-\beta\kappa) \left( \hat{p}_t + \hat{\psi}_t \right). \end{aligned}$$

Après simplification (exercice!) nous obtenons:

$$(\hat{p}_t - \hat{p}_{t-1}) = \beta E_t (\hat{p}_{t+1} - \hat{p}_t) + \frac{(1-\kappa)(1-\beta\kappa)}{\kappa} \hat{\psi}_t,$$

ou

$$\pi_t = \beta E_t \pi_{t+1} + \frac{(1-\kappa)(1-\beta\kappa)}{\kappa} \hat{\psi}_t.$$

Cette équation est presque de la même forme que (1) sauf pour le fait que nous avons le coût marginal réel et non l'output gap du côté droit. Soit  $\rho$ , l'élasticité du coût marginal de production par rapport à l'output. Nous avons:

$$\hat{\psi}_t = \rho y_t. \quad (12)$$

## 5 Relation entre coût marginal et output gap

Afin de pouvoir analyser ce lien, il faudra faire des hypothèses concernant la fonction de production des firmes et la fonction d'utilité du ménage représentatif. D'abord, en ce qui concerne la fonction de production, supposons que:

$$Y_t(z) = A_t N_t(z)^\alpha,$$

avec  $0 < \alpha < 1$ . Notre premier but est de trouver la fonction de production agrégée afin de pouvoir calculer le coût marginal réel **moyen** dans l'économie.<sup>2</sup>

Nous avons:

$$\begin{aligned} N_t &= \int_0^1 N_t(z) dz = \int_0^1 \left( \frac{Y_t(z)}{A_t} \right)^{1/\alpha} dz \\ &= \left( \frac{Y_t}{A_t} \right)^{1/\alpha} \int_0^1 \left( \frac{P_t(z)}{P_t} \right)^{-\mu/\alpha} dz \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Notez qu'à cause des rendements décroissants au facteur travail dans cette fonction de production, le coût marginal réel n'est pas égal pour des firmes ayant des niveaux de production différents. Une firme avec un prix relatif plus faible (et donc avec une production plus élevée) va avoir un coût marginal réel plus élevé parce que la productivité marginale de sa main-d'œuvre sera plus faible.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \log(N_t) &= \frac{1}{\alpha} \log(Y_t) - \frac{1}{\alpha} \log(A_t) + \log\left(\int_0^1 \left(\frac{P_t(z)}{P_t}\right)^{-\mu/\alpha} dz\right) \\ \Rightarrow \log(N_t) &= \frac{1}{\alpha} \log(Y_t) - \frac{1}{\alpha} \log(A_t) + \log(D_t)\end{aligned}\quad (13)$$

où

$$D_t \equiv \int_0^1 \left(\frac{P_t(z)}{P_t}\right)^{-\mu/\alpha} dz.$$

La variable  $D_t$  est une mesure de la **dispersion** entre les prix différents fixés par les firmes différentes dans l'économie. Il est possible de montrer les résultats suivants.

1.  $D_t \geq 1$ . Voir Galí (2008, Annexe 3.3) pour la démonstration.
2. Dans un équilibre symétrique en l'absence de rigidité de prix,  $D_t = 1$ . Ce résultat est immédiat parce que dans cet équilibre symétrique nous avons  $P_t(z) = P_t \quad \forall z$ . En présence de rigidités des prix et en dehors de l'état stationnaire,  $D_t > 1$ .
3. Jusqu'à une approximation du premier ordre,  $D_t$  est constante.

La fonction de production agrégée est à comparer avec la fonction de production des firmes individuelles. Si on retransforme en niveaux, on a:

$$Y_t = A_t N_t^\alpha / D_t^\alpha.$$

$D_t$  est un écart ("wedge") qui fait diminuer l'output (et donc la consommation) pour un niveau donné d'intrants (dans ce cas il n'y a qu'un seul intrant, l'emploi

agrégé).  $D_t$  joue un rôle important dans la théorie néo-keynésienne. Elle représente une distortion additionnelle due à la présence de rigidités de prix (même en l'absence de rigidités de prix il y a la distortion due au pouvoir de monopole des firmes). C'est le principal coût de l'inflation dans le modèle néo-keynésien.

Maintenant, dérivons une expression pour le coût marginal réel au niveau agrégé. Pensons au problème de minimiser le coût de produire  $Y_t$  comme s'il y avait une firme qui gérait la production agrégée. Le problème s'écrit de la façon suivante:

$$\min_{N_t} (w_t N_t + MC_t (Y_t - A_t N_t^\alpha / D_t^\alpha)),$$

où  $w_t$  est le salaire réel. Prenant comme donnée la valeur de  $D_t$ , la CPO est:

$$w_t = MC_t \alpha \frac{Y_t}{N_t}.$$

Prenant des logs des deux côtés, nous obtenons après simplification:

$$\log(MC_t) = \log(w_t) - (\log(Y_t) - \log(N_t)) - \log(\alpha). \quad (14)$$

Il nous reste à utiliser la courbe d'offre de travail pour exprimer le salaire réel en fonction de l'emploi (et donc indirectement en fonction de l'output). Supposons une fonction d'utilité de la forme:

$$U = E_t \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \left( \ln(C_{t+i}) - \frac{\gamma}{(1+\psi)} N_{t+i}^{(1+\psi)} \right).$$

Sans spécifier en détail la contrainte budgétaire, nous savons que la CPO pour le choix des heures doit prendre la forme suivante:

$$\lambda_t w_t = \gamma N_t^\psi.$$

Sachant qu'en équilibre  $c_t = Y_t = 1/\lambda_t$  nous avons en logs:

$$\log(w_t) = \log(\gamma) + \psi \log(N_t) + \log(Y_t). \quad (15)$$

Maintenant, nous pouvons substituer cette expression pour le salaire réel et l'expression pour l'emploi de l'équation (5) dans l'équation (14):

$$\begin{aligned} \log(MC_t) &= (\log(\gamma) + \psi \log(N_t) + \log(Y_t)) - \log(Y_t) + \log(N_t) - \log(\alpha) \\ \Rightarrow \log(MC_t) &= (\psi + 1) \left( \frac{1}{\alpha} \log(Y_t) - \frac{1}{\alpha} \log(A_t) + \log(D_t) \right) + \log(\gamma) - \log(\alpha) \\ \Rightarrow \log(MC_t) &= \frac{\psi + 1}{\alpha} \log(Y_t) - \frac{\psi + 1}{\alpha} \log(A_t) + \log(\gamma) + (\psi + 1) \log(D_t) - \log(\alpha). \end{aligned} \quad (16)$$

Les trois derniers termes sont constants ( $\log(D_t)$  l'est jusqu'à une approximation du premier ordre). Cette équation est valable indépendamment de la présence ou non de rigidités de prix. Nous pouvons utiliser cette équation pour trouver le niveau "naturel" de l'output, sachant que sans rigidités de prix nous avons

$$MC_t = \frac{\mu - 1}{\mu}.$$

Notez que la valeur de  $MC_t$  en l'absence de rigidités de prix est égale à sa valeur à l'état stationnaire. Utilisant la notation  $Y_t^n$  pour indiquer le niveau naturel de l'output, nous avons:

$$\log\left(\frac{\mu - 1}{\mu}\right) = \frac{\psi + 1}{\alpha} \log(Y_t^n) - \frac{\psi + 1}{\alpha} \log(A_t) + \log(\gamma) + (\psi + 1) \log(D_t) - \log(\alpha).$$

Soustrayant cette équation de l'équation (16) nous obtenons:

$$\log(MC_t) - \log\left(\frac{\mu - 1}{\mu}\right) = \frac{\psi + 1}{\alpha} (\log(Y_t) - \log(Y_t^n))$$

que nous écrivons de la façon suivante:

$$\hat{\psi}_t = \frac{\psi + 1}{\alpha} y_t.$$

Donc, il faut que le  $\rho$  de l'équation (12) soit égal à  $\frac{\psi+1}{\alpha}$ . Finalement, nous obtenons la courbe de Phillips suivante:

$$\pi_t = \beta E_t \pi_{t+1} + \frac{(\psi + 1)(1 - \kappa)(1 - \beta\kappa)}{\alpha \kappa} y_t$$

et donc

$$\varphi = \frac{(\psi + 1)(1 - \kappa)(1 - \beta\kappa)}{\alpha \kappa}.$$

## 5.1 Cas spéciaux

1. Lorsque  $\kappa \rightarrow 0$ , toutes les firmes ajustent leurs prix chaque période et nous revenons vers un modèle sans rigidité de prix. Dans ce cas, l'inflation devient très sensible à l'output gap. En fait, dans le cas limite l'inflation s'ajuste immédiatement pour éliminer l'output gap. L'inflation n'est pas persistante, et un choc de demande n'a presque aucun impact sur les variables réelles.
2. Lorsque  $\psi \rightarrow \infty$ , l'inflation est encore très sensible à l'output gap. C'est un cas où l'élasticité de l'offre de travail devient très faible, et ça correspond à la discussion dans la section 6.5 du livre de Romer. Suite à un choc de demande négatif (l'argument pour un choc positif est symétrique), il faut que l'output baisse étant donné la rigidité de prix, et pour cela il faut que l'emploi baisse. Le marché du travail étant en équilibre concurrentiel, ça prend une baisse considérable du salaire réel pour inciter les travailleurs à réduire leur offre de travail. Le coût marginal réel baisse beaucoup, et les firmes qui peuvent réviser leurs prix les modifient de façon substantielle. La dynamique du modèle est semblable au cas où  $\kappa \rightarrow 0$ .
3. Lorsque  $\kappa \rightarrow 1$ , les firmes ajustent rarement leurs prix. L'inflation devient très peu sensible à l'output gap. Dans le cas limite, nous avons:

$$\pi_t = \beta E_t \pi_{t+1}.$$

Puisque la valeur numérique de  $\beta$  est très près de 1, l'inflation se comporte presque comme si elle était engendrée par une marche aléatoire. Elle est très persistante.

4. Le cas  $\psi = 0$  correspond au modèle de travail indivisible de Hansen (1985) que nous avons vu dans le cours sur les modèles de cycles réels. Nous avons vu que l'offre de travail individuel devient infiniment élastique par rapport au salaire réel. Notez que même dans ce cas, le coût marginal réel reste sensible à l'output gap. L'élasticité du coût marginal par rapport à l'output gap est égale dans ce cas à  $1/\alpha$ .

## 5.2 Discussion

Même en dehors des cas spéciaux, pour des valeurs empiriquement plausibles de  $\kappa$  et de  $\psi$ , l'inflation dans le modèle de base n'est pas très persistante. Afin d'expliquer ce que l'on croit être la persistance observée de l'inflation, les chercheurs ont emprunté plusieurs voies alternatives.

1. On peut introduire de la persistance directement en supposant l'existence de firmes qui ajustent leurs prix en fonction de l'inflation retardée. Soit  $g$  la fraction de firmes qui ajustent leurs prix de cette façon. La courbe de Phillips devient:

$$\pi_t = g\pi_{t-1} + (1 - g)(\beta E_t \pi_{t+1} + \varphi y_t).$$

Ce type d'équation a connu un certain succès empirique, mais elle laisse à désirer au plan théorique, dans la mesure où le but de la macro moderne est de formuler des modèles basés sur l'optimisation par les individus.<sup>3</sup>

2. On peut briser le lien entre la courbe d'offre de travail et l'output.
  - (a) On peut introduire une rigidité salariale, avec des ménages qui sont des monopoleurs qui vendent des types de travail spécialisés aux firmes et qui fixent les salaires à l'avance. Voir Huang et Liu (2002).
  - (b) On peut introduire d'autres hypothèses concernant le fonctionnement du marché du travail. Un premier exemple serait les modèles de salaire d'efficience, où l'effort est relié directement au salaire et les firmes ont une incitation à ne pas trop baisser le salaire réel face à un choc de demande négatif parce que cela peut nuire à la productivité. Face à un choc de demande positif, elles n'ont pas non plus une incitation à augmenter le salaire réel beaucoup puisque'elles bénéficient d'une amélioration de la productivité de leur main-d'œuvre en augmentant un petit peu le salaire réel.<sup>4</sup> Un deuxième exemple serait les modèles d'appariement, où les chômeurs et les employeurs potentiels doivent se chercher et où le salaire réel est établi par un

---

<sup>3</sup>On peut arriver à une courbe de Phillips semblable en supposant une indexation partielle des prix par les firmes, c'est à dire un modèle où, lors de périodes où une firme n'a pas la chance de réoptimiser son prix elle peut quand même modifier son prix en fonction de l'inflation réalisée, suivant un coefficient d'indexation qui est exogène. Voir Christiano, Eichenbaum et Evans (2007).

<sup>4</sup>L'exemple numérique dans le chapitre 6 de Romer où il remplace le salaire réel d'équilibre par une fonction du salaire réel ("real wage function") où le salaire réel est beaucoup moins sensible aux fluctuations de l'output est motivé par un modèle simple de salaire d'efficience dont les détails sont présentés dans le chapitre 9.

processus de négociation.<sup>5</sup>

3. On peut remettre en question l'idée même de la persistance de l'inflation.

Le papier récent de Benati (2008) montre que depuis 1991, date où les premières banques centrales ont adopté une politique de choisir une cible explicite pour le taux d'inflation, il n'y a plus de persistance dans les fluctuations du taux d'inflation.

## 6 La courbe IS

La courbe IS du modèle néo-keynésien, qui est donnée par l'équation (2), découle directement de l'équation d'Euler du ménage pour la détention d'une obligation avec échéance d'une période et avec taux de rendement nominal certain. L'équation d'Euler au départ est:

$$\lambda_t = \beta E_t (\lambda_{t+1} (1 + r_{t+1})),$$

où comme d'habitude  $\lambda_t$  est l'utilité marginale de la consommation. Avec une fonction d'utilité logarithmique et dans une économie fermée sans gouvernement et sans investissement, nous avons  $c_t = Y_t = 1/\lambda_t$ . Donc, nous avons

$$\frac{1}{Y_t} = \beta E_t \left( \frac{1}{Y_{t+1}} (1 + r_{t+1}) \right).$$

---

<sup>5</sup>La variabilité du salaire réel dans ce type de modèle est très sensible aux hypothèses concernant le processus de négociation pour établir le salaire réel. Voir Blanchard et Galí (2007) pour une discussion.

Calculant une approximation du premier ordre, nous obtenons:

$$-\frac{1}{Y^2} (Y_t - Y) = -\beta(1+r)\frac{1}{Y^2} E_t (Y_{t+1} - Y) + \beta\frac{1}{Y} E_t (r_{t+1} - r)$$

$$\Rightarrow \hat{y}_t = E_t \hat{y}_{t+1} - \frac{1}{(1+r)} E_t (r_{t+1} - r)$$

où  $\hat{y}_t$  est l'écart de l'output par rapport à sa valeur à l'état stationnaire. Cette équation est valable pour l'output d'équilibre en présence de rigidités de prix, et aussi pour l'output naturel. Dans le dernier cas, nous avons:

$$\Rightarrow \hat{y}_t^n = E_t \hat{y}_{t+1}^n - \frac{1}{(1+r)} E_t (r_{t+1}^n - r)$$

où  $r_t^n$  est le taux d'intérêt naturel, le taux d'intérêt compatible avec un équilibre sans rigidité de prix. Soustrayant cette équation de celle qui précède, nous obtenons:

$$y_t = E_t y_{t+1} - \frac{1}{(1+r)} E_t (r_{t+1} - r_{t+1}^n)$$

$$\Rightarrow y_t = E_t y_{t+1} - \frac{1}{(1+r)} (i_t - E_t \pi_{t+1} - E_t r_{t+1}^n) \quad (17)$$

où  $y_t$  représente l'output gap. Cette équation est légèrement différente par rapport à l'équation (2) à cause de la présence du taux d'intérêt réel naturel. Ce dernier terme est pertinent dans la mesure où on veut analyser l'impact de chocs technologiques: sinon, on peut le laisser tomber.

Nous avons deux équations, (1) et soit (2) ou (17). Il y a trois inconnus si on fait abstraction de chocs technologiques:  $y_t$ ,  $\pi_t$  et  $i_t$ . Si on utilise la version de la

courbe IS avec  $r_t^n$ , il faut aussi modéliser l'équilibre sans rigidité de prix, ce que nous ne ferons pas ici. Il nous faut une autre équation pour compléter le modèle. Il s'agit d'une équation pour expliquer le taux d'intérêt nominal de court terme.

## 7 Comment modéliser la politique monétaire?

Plusieurs options sont possibles.

1. Pourrait-on tout simplement considérer le taux d'intérêt  $i_t$  comme une variable exogène? Malheureusement, la réponse est non, à cause de du "Principe de Taylor" mentionné ci-dessous. Si le taux d'intérêt ne réagit pas à l'inflation, il peut y avoir un problème de stabilité dynamique. N'importe quel niveau des prix sera compatible avec l'équilibre dans ce cas.
2. Nous pourrions supposer que le taux d'intérêt est déterminé de façon optimale par la banque centrale, afin de maximiser le bien-être du ménage représentatif. C'est le sujet du chapitre suivant sur la politique monétaire optimale.
3. Nous pourrions ajouter une équation qui explique bien (du point de vue statistique ou économétrique) l'évolution des taux d'intérêt de court terme dans les pays industrialisés. En fait, on utilise souvent une soi-disant

“Règle de Taylor” pour compléter le modèle. Elle prend la forme suivante:

$$i_t = i + \rho_\pi \pi_t + \rho_y y_t$$

où  $\rho_\pi > 0$  et  $\rho_y > 0$ . En fait, pour la stabilité du système, il faut imposer  $\rho_\pi > 1$  (le soi-disant “Principe de Taylor”). L’intuition de cette restriction est que, pour contrer une augmentation (l’argument dans le cas d’une baisse est symétrique) de l’inflation provoquée par une augmentation de la demande agrégée, la banque centrale doit faire augmenter le taux d’intérêt **réel**. Pour ce faire, il faut que le taux d’intérêt nominal augmente par plus que le taux d’inflation. Techniquement, il faut imposer la restriction pour obtenir le bon nombre de racines instables du système dynamique de deux équations.<sup>6</sup>

La Règle de Taylor a plusieurs avantages au plan de la modélisation.

- (a) Elle est conforme à l’esprit de régimes de politique monétaire où il y a une cible pour le taux d’inflation et où l’instrument de contrôle pour la politique monétaire est le taux d’intérêt nominal de court terme.
- (b) Elle permet d’expliquer assez bien le comportement observé du taux d’intérêt nominal de court terme dans plusieurs pays industrialisés (bon ajustement statistique des régressions, bon pouvoir explicatif hors-échantillon).

---

<sup>6</sup>Le système de deux équations à deux variables dynamiques non prédéterminées ( $y_t$  et  $\pi_t$ ), et pour satisfaire les conditions de stabilité en point de selle de Blanchard et Kahn (1990), il faut que le système ait deux racines instables. Pour les conditions exactes de stabilité, voir Galí (2008).

- (c) Avec un choix approprié des coefficients  $\rho_\pi$  et  $\rho_y$ , elle permet d'atteindre dans le modèle de base et dans des modèles néo-keynésiens plus élaborés un niveau de bien-être presque aussi élevé qu'avec des politiques monétaires optimales.

## 8 Les chocs

Le modèle que nous venons d'élaborer ne contient pas de choc, à part un choc technologique qui affecterait le taux d'intérêt réel naturel. Quels sont les possibilités de chocs dans ce type de modèle?

1. On pourrait ajouter un terme d'erreur à la courbe de Phillips. Ce terme d'erreur peut être micro-fondé sur la base d'une élasticité de substitution  $\mu$  qui serait variable dans le temps. Voir Steinsson (2003) pour une démonstration. Un tel terme d'erreur est communément appelé "cost push" (comme s'il affectait le coût marginal de production) ou "supply shock". Il joue un rôle important dans l'analyse de la politique monétaire optimale. Sans ce type de choc, comme nous allons voir dans le chapitre suivant, il n'y a pas un arbitrage véritable entre inflation et output dans le modèle, et une politique de stabilisation parfaite des prix est optimale, puisque la stabilisation de l'inflation a pour conséquence la stabilisation de l'output gap. Pour une discussion très détaillée de la politique monétaire optimale en présence de chocs "cost push", voir Clarida, Galí et Gertler (1999).
2. On pourrait ajouter un terme d'erreur à la Règle de Taylor. Il pourrait être

justifié en faisant appel à une composante “non systématique” de la politique monétaire, ou en faisant appel à des chocs exogènes qui pourraient affecter le secteur bancaire/financier, qui n’est pas modélisé explicitement mais qui est responsable de la création d’une bonne fraction du stock monétaire.

3. On pourrait ajouter un terme d’erreur à la courbe IS. Ce terme d’erreur pourrait être micro-fondé sur la base de la présence d’un gouvernement qui a des dépenses publiques qui sont sujettes à des chocs aléatoires, ou sur la base de chocs affectant l’utilité marginale de la consommation (chocs aux préférences).

## Références

- Benati, Luca (2008), “Investigating Inflation Persistence Across Monetary Regimes.” *Quarterly Journal of Economics* 123, 1005–1060
- Blanchard, Olivier et Jordi Galí (2007), “Real Wage Rigidities and the New Keynesian Model.” *Journal of Money, Credit and Banking* 39, 35–65
- Blanchard, Olivier et Charles Kahn (1990), “The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations.” *Econometrica* 48, 1305–1313
- Calvo, Guillermo (1983), “Staggered Prices in a Utility Maximizing Framework.” *Journal of Monetary Economics* 12, 383–398
- Christiano, Laurence, Martin Eichenbaum et Charles Evans (2005), “Nominal Rigidities and the Dynamic Effects of a Shock to Monetary Policy.” *Journal*

*of Political Economy* 113, 1–45

Clarida, Richard, Jordi Galí et Mark Gertler (1999), “The Science of Monetary Policy: A New Keynesian Perspective.” *Journal of Economic Literature* 37, 1661–1707

Galí, Jordi (2008), *Monetary Policy, Inflation and the Business Cycle: An Introduction to the New Keynesian Framework*. Princeton, Princeton University Press

Hansen, Gary (1985), “Indivisible Labor and the Business Cycle” *Journal of Monetary Economics* 16, 309–327

Huang, Kevin and Zheng Liu (2002), “Staggered Price-Setting, Staggered Wage-Setting and Business Cycle Persistence.” *Journal of Monetary Economics* 49, 405–433

Steinsson, Jon (2003), “Optimal Monetary Policy in an Economy with Inflation Persistence.” *Journal of Monetary Economics* 50, 1425–1456

Woodford, Michael (2003), *Interest and Prices*. Princeton, Princeton University Press

Cette version: 29/11/2008