

ECO 8021: Notes de cours

L'évaluation des actifs sous incertitude et le taux de change

Steve Ambler
Département des sciences économiques
École des sciences de la gestion
Université du Québec à Montréal

Automne 2023

Introduction

Les objectifs du chapitre sont les suivants.

- ▶ Utiliser le cadre d'analyse d'un agent représentatif avec un horizon de planification infini afin d'étudier le lien entre le taux de change au comptant et le taux de change à terme
- ▶ Comprendre les raisons de l'existence de **primes de risque** sur le marché des changes
- ▶ Utiliser l'analyse théorique pour comprendre pourquoi les modèles empiriques du taux de change ne font pas mieux qu'un modèle simple de marche aléatoire pour prédire le taux de change (Ceci fait partie des faits caractéristiques du comportement des taux de change)
- ▶ Faire un survol rapide des modèles empiriques de la prime de risque. Comprendre pourquoi ces modèles sont basés sur la modélisation de la **variance conditionnelle** des déterminants des taux de change

Introduction (suite)

- ▶ Nous allons aussi faire appel à la version intertemporelle du modèle d'évaluation des actifs financiers (MÉDAF ou CAPM)

Stratégie séquentielle

1. L'intuition du lien possible entre le taux à terme et le taux au comptant
2. Un modèle de la prime de risque sur le marché à terme
3. Le lien entre le modèle de prime de risque sur le marché à terme et le modèle d'évaluation des actifs financiers dynamique (MÉDAF dynamique)
4. Conséquences pour les modèles empiriques du taux à terme comme prédicteur du taux au comptant futur (nécessité d'une prime de risque variable)
5. Modèle d'équilibre général pour expliquer la prime de risque variable

Intuition

- ▶ Vous devez acheter des dollars US pour payer une facture dans 90 jours
- ▶ Vous pourriez attendre 90 jours et les acheter sur le marché au comptant (“spot market” en anglais)
- ▶ Vous pourriez les acheter **aujourd’hui** sur le marché à terme (“forward market” en anglais)
- ▶ Notre intuition nous dit que, probablement, si vous pensez que le prix au comptant dans 90 jours sera plus cher que le taux à terme aujourd’hui, vous allez acheter à terme, et vice versa
- ▶ Autrement dit, on penserait que (ou une période est 90 jours)

$$E_t(S_{t+1}) \approx F_t$$

Intuition (suite)

- ▶ Et donc ce serait le cas que

$$S_{t+1} = F_t + u_{t+1}$$

avec u_{t+1} une erreur de prévision non corrélée avec l'information disponible aujourd'hui

- ▶ Dans un modèle de régression (en logs),

$$(s_{t+1} - s_t) = a_0 + a_1(f_t - s_t) + u_{t+1}$$

nous aurions l'hypothèse nulle $H_0 : a_1 = 1$

- ▶ Il s'avère que dans les données **ce n'est pas du tout le cas**
- ▶ Ceci est un des grands mystères en finances internationales. "Le paradoxe du taux de change à terme"
- ▶ Il y a une **vaste** littérature consacrée à une explication de la divergence

Rappel sur la parité couverte

- ▶ Considérez les 2 placements suivants
 1. Acheter une obligation canadienne avec un rendement brut certain de $1 + i_t$
 2. Acheter des dollars US, acheter une obligation américaine avec un rendement brut certain de $1 + i_t^*$, et acheter un contrat à terme pour convertir les dollars américains en dollars canadiens
- ▶ Puisque les rendements sont certains par hypothèse, et s'il n'y a pas de possibilité de défaut sur le contrat à terme, il faut que les taux de rendement soient égaux:

$$(1 + i_t) = \frac{F_t}{S_t}(1 + i_t^*)$$

- ▶ Ceci est la parité **couverte** (ce sont les risques qui sont couverts) des taux d'intérêt

Rappel sur la parité ouverte

- ▶ Maintenant considérez les 2 placements suivants
 1. Acheter une obligation canadienne avec un rendement brut certain de $1 + i_t$
 2. Acheter des dollars US, acheter une obligation américaine avec un rendement brut certain de $1 + i_t^*$, et convertir les dollars américains en dollars canadiens sur le marché au comptant en $t + 1$
- ▶ Le taux de rendement **réalisé** dans le deuxième cas est $\frac{S_{t+1}}{S_t}(1 + i_t^*)$, et il est **incertain**
- ▶ **Si** les rendements **espérés** sont égaux,

$$(1 + i_t) = \frac{E_t(S_{t+1})}{S_t}(1 + i_t^*)$$

- ▶ Ceci est la parité **ouverte** (“ouverte” puisque les risques ne sont pas couverts) des taux d’intérêt

Conséquences des parités

- ▶ La parité couverte doit tenir (en l'absence de coûts de transaction) à cause de l'arbitrage
- ▶ Puisque la parité ouverte comprend un taux de rendement qui est risqué, elle ne tient pas forcément
- ▶ **Si** la parité ouverte tient, nous avons

$$\frac{F_t}{S_t}(1 + i_t^*) = \frac{E_t(S_{t+1})}{S_t}(1 + i_t^*)$$

$$\Rightarrow F_t = E_t(S_{t+1})$$

Spécification du modèle

- ▶ Agent représentatif, horizon infini, l'utilité dépend de la consommation
- ▶ Nous ne développons pas un modèle complet d'équilibre général
- ▶ Nous n'analysons pas non plus les raisons pour lesquelles la monnaie est détenue. Il suffit de supposer l'existence d'une fonction de demande de monnaie qui donne une solution en équilibre général pour le niveau des prix
- ▶ Nous utilisons les conditions d'optimalité qui doivent tenir si l'agent maximise son utilité afin d'évaluer les taux de change au comptant et à terme

Spécification du modèle (suite)

- ▶ La fonction d'utilité de l'agent représentatif est donnée par

$$E_t \left(\sum_{i=0}^{\infty} \beta^i U(C_{t+i}) \right), \quad (1)$$

où E_t est l'opérateur d'espérance conditionnelle basé sur l'information disponible en t

- ▶ Peu importe la spécification détaillée de la production ou des contraintes budgétaires, la condition d'optimalité suivante doit tenir pour un actif quelconque qui a un **taux de rendement réel** incertain en t égal à r_{t+1}^m :

$$U'(C_t) = \beta E_t \left((1 + r_{t+1}^m) U'(C_{t+1}) \right) \quad (2)$$

- ▶ L'égalité dit tout simplement que le coût marginal de sacrifier une unité de consommation pour acheter l'actif doit être égal au bénéfice marginal espéré, évalué utilisant l'utilité marginale de la consommation en $t + 1$ et actualisé au taux β .

Spécification du modèle (suite)

- ▶ Pour un actif qui a un taux de rendement *nominal* égal à i_{t+1}^m , la condition d'optimalité est

$$\frac{1}{P_t} U'(C_t) = \beta E_t \left((1 + i_{t+1}^m) \frac{1}{P_{t+1}} U'(C_{t+1}) \right), \quad (3)$$

où P_t est le niveau général des prix en t .

- ▶ S'il existe un actif dont le rendement nominal est certain ou connu en t , nous avons la condition suivante:

$$\frac{1}{P_t} U'(C_t) = (1 + i_{t+1}) \beta E_t \left(\frac{1}{P_{t+1}} U'(C_{t+1}) \right), \quad (4)$$

où i_{t+1} est le taux de rendement sur l'actif certain.

- ▶ Puisque le taux de rendement est certain en t , nous pouvons traiter $(1 + i_{t+1})$ comme une constante et l'écrire en dehors de l'opérateur d'espérance. Notez que, dans le cas où il y a un agent *représentatif*, cette condition a pour conséquence que le taux de rendement nominal certain est unique

Relation entre le taux au comptant et le taux à terme

- ▶ Ces conditions nous permettent d'évaluer un taux de rendement **quelconque**, pour n'importe quel type de placement
- ▶ Considérez le placement suivant, où F_t est le taux de change à terme (avec une échéance d'une période) et S_t est égal au taux de change au comptant, où la devise nationale est le dollar et la devise étrangère est la livre:
 1. placer F_t dollars pour acheter l'actif avec le taux de rendement certain;
 2. signer un contrat à terme pour l'achat de $(1 + i_{t+1})$ livres (la devise étrangère), avec l'intention de les revendre sur le marché au comptant en $t + 1$
- ▶ Nous utilisons F_t et $(1 + i_{t+1})$ **simultanément** pour représenter des **taux** ou des rendements **et** des quantités

Taux au comptant et à terme (suite)

- ▶ Le coût de ce placement en t en dollars est

$$F_t,$$

puisqu'il ne coûte rien en t pour signer un contrat à terme

- ▶ Donc, c'est seulement la première partie du placement (placer F_t dollars pour acheter l'actif sans risque) qui coûte quelque chose
- ▶ Le rendement brut nominal en $t + 1$ est

$$F_t(1 + i_{t+1}) + (S_{t+1} - F_t)(1 + i_{t+1}) = S_{t+1}(1 + i_{t+1})$$

- ▶ Le premier terme est le rendement brut provenant de l'achat de l'actif sans risque
- ▶ Le deuxième terme est le rendement brut de la deuxième partie du placement. Il coûte $F_t(1 + i_{t+1})$ pour acheter les devises étrangères, et ça rapporte $S_{t+1}(1 + i_{t+1})$ lorsqu'on les revend sur le marché au comptant

Taux au comptant et à terme (suite)

- ▶ La condition d'optimalité générale a pour conséquence (voir aussi l'Annexe) que

$$\frac{F_t}{P_t} U'(C_t) = \beta E_t \left(\frac{S_{t+1}}{P_{t+1}} (1 + i_{t+1}) U'(C_{t+1}) \right)$$

- ▶ Le membre gauche donne le coût marginal (en termes réels puisqu'on divise par P_t)
- ▶ Le membre droit donne le bénéfice marginal espéré du placement
- ▶ Donc nous avons

$$F_t = E_t \left(\beta \frac{P_t}{P_{t+1}} \frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)} S_{t+1} (1 + i_{t+1}) \right) \quad (5)$$

Taux au comptant et à terme (suite)

- ▶ Nous pouvons diviser les deux côtés par S_t afin d'écrire l'équation en termes de variables **stationnaires**:

$$\left(\frac{F_t}{S_t}\right) =$$

$$E_t \left(\beta (1 + i_{t+1}) \left(\frac{P_t}{P_{t+1}}\right) \left(\frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)}\right) \left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) \right) \quad (6)$$

- ▶ $\left(\frac{P_t}{P_{t+1}}\right)$ est l'inverse du taux d'inflation brut. Certains chercheurs ont trouvé que le taux d'inflation est non stationnaire, mais la variable

$$\left((1 + i_{t+1}) \frac{P_t}{P_{t+1}} \right),$$

le taux d'intérêt réel "ex post" (basé sur le taux d'inflation **réalisé** entre t et $t + 1$) devrait être stationnaire

Taux au comptant et à terme (suite)

- ▶ L'équation (6) est une **équation d'Euler**, mais après avoir divisé des deux côtés par $U'(C_t)$
- ▶ Avec une hypothèse sur la forme fonctionnelle de la fonction d'utilité, cette équation pourrait être utilisée directement pour estimer les paramètres de la fonction d'utilité et pour tester la validité du modèle (utilisant la méthode des moments généralisée ou GMM en anglais). Cette approche n'a pas (à ma connaissance) été utilisée pour tester le lien entre les taux de change au comptant et à terme

Taux au comptant et à terme (suite)

- ▶ Maintenant, utilisons la relation suivante qui tient pour la covariance conditionnelle entre deux variables aléatoires X_t et Y_t :

$$\text{Cov}_t(X_t; Y_t) \equiv E_t(X_t Y_t) - E_t(X_t) E_t(Y_t) \quad (7)$$

- ▶ Ceci implique

$$F_t = E_t \left(\beta \frac{P_t}{P_{t+1}} \frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)} (1 + i_{t+1}) \right) E_t(S_{t+1}) \\ + \text{Cov}_t \left(\beta \frac{P_t}{P_{t+1}} \frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)} (1 + i_{t+1}); S_{t+1} \right). \quad (8)$$

Taux au comptant et à terme (suite)

- ▶ La condition d'optimalité générale pour un actif quelconque a pour conséquence que

$$E_t \left(\beta \frac{P_t}{P_{t+1}} \frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)} (1 + i_{t+1}) \right) = 1,$$

- ▶ et donc nous avons

$$E_t(S_{t+1}) - F_t = -\text{Cov}_t \left(\left[\beta \frac{P_t}{P_{t+1}} \frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)} (1 + i_{t+1}) \right]; S_{t+1} \right). \quad (9)$$

- ▶ Si la covariance conditionnelle entre le taux au comptant futur et l'expression entre crochets n'est pas nulle, **le taux à terme n'est pas un prédicteur non biaisé du taux au comptant futur**

Interprétation

- Considérons la condition d'optimalité pour un actif nominal quelconque:

$$\begin{aligned}\frac{1}{P_t} U'(C_t) &= \beta E_t \left((1 + i_{t+1}^m) \frac{1}{P_{t+1}} U'(C_{t+1}) \right) \\ &= \beta E_t ((1 + i_{t+1}^m)) E_t \left(\frac{1}{P_{t+1}} U'(C_{t+1}) \right) \\ &\quad + \beta \text{Cov}_t \left(\frac{1}{P_{t+1}} U'(C_{t+1}); (1 + i_{t+1}^m) \right) \\ &\Rightarrow (1 + i_{t+1}) \frac{1}{P_t} U'(C_t) \\ &= \beta (1 + i_{t+1}) E_t ((1 + i_{t+1}^m)) E_t \left(\frac{1}{P_{t+1}} U'(C_{t+1}) \right) \\ &\quad + \beta (1 + i_{t+1}) \text{Cov}_t \left(\frac{1}{P_{t+1}} U'(C_{t+1}); (1 + i_{t+1}^m) \right)\end{aligned}$$

Interprétation (suite)

$$\begin{aligned} \Rightarrow (1 + i_{t+1}) &= E_t \left((1 + i_{t+1}^m) \right) E_t \left(\beta \frac{P_t}{P_{t+1}} \frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)} (1 + i_{t+1}) \right) \\ &+ \text{Cov}_t \left(\beta \frac{P_t}{P_{t+1}} \frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)} (1 + i_{t+1}); (1 + i_{t+1}^m) \right) \end{aligned} \quad (10)$$

- La condition d'optimalité générale a pour conséquence que

$$E_t \left(\beta \frac{P_t}{P_{t+1}} \frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)} (1 + i_{t+1}) \right) = 1 \quad (11)$$

- et donc on a

$$\begin{aligned} (1 + i_{t+1}) &= E_t \left((1 + i_{t+1}^m) \right) \\ &+ \text{Cov}_t \left(\beta \frac{P_t}{P_{t+1}} \frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)} (1 + i_{t+1}); (1 + i_{t+1}^m) \right) \end{aligned} \quad (12)$$

Interprétation (suite)

- ▶ ce qui donne

$$E_t(i_{t+1}^m) = i_{t+1} - \text{Cov}_t \left(\left[\beta \frac{P_t}{P_{t+1}} \frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)} (1 + i_{t+1}) \right]; (1 + i_{t+1}^m) \right) \quad (13)$$

- ▶ Cette équation peut être appelée **l'équation fondamentale de l'évaluation des actifs sous incertitude**
- ▶ Elle a une interprétation semblable à la théorie statique du modèle d'évaluation des actifs financiers (MÉDAF, "Capital Asset Pricing Model" ou CAPM en anglais)
- ▶ Dans cette dernière théorie, un actif qui a une covariance négative avec le "portefeuille du marché" agit comme une assurance, et permet de diminuer le risque total auquel fait face l'individu
- ▶ Pour cette raison, l'individu est prêt à détenir l'actif **même s'il a un taux de rendement espéré inférieur au taux de rendement certain**

Interprétation (suite)

- ▶ Dans la notation utilisée ici, l'équation fondamentale du MÉDAF est

$$E_t(i_{t+1}^m) - i_{t+1} = \beta_m (E_t(i_{t+1}^*) - i_{t+1})$$

où

$$\beta_m = \frac{\text{Cov}(i_{t+1}^m, i_{t+1}^*)}{\text{Var}(i_{t+1}^*)}$$

avec i_{t+1}^m le taux de rendement sur un actif risqué et i_{t+1}^* le taux de rendement sur le portefeuille du marché

- ▶ Dans le MÉDAF, le risque d'un actif est mesuré par sa covariance avec le portefeuille du marché

Interprétation (suite)

- ▶ Dans notre théorie, un actif qui a une covariance *positive* avec le terme entre crochets aussi permet à l'agent de s'assurer contre le risque
- ▶ C'est un actif qui a, par exemple, tendance à payer bien lorsque l'utilité marginale de la consommation est élevée en $t + 1$
- ▶ Lorsque l'utilité marginale de la consommation est élevée, l'agent a davantage besoin d'un rendement élevé
- ▶ Cette situation correspond à la situation dans le CAPM où le rendement du "portefeuille du marché" a tendance à être faible.
- ▶ Dans le cas des contrats à terme, le taux de rendement certain qui est pertinent est **nul** puisque le coût de signer un contrat à terme en t est nul. La covariance conditionnelle entre le taux au comptant futur et le terme entre crochets peut être appelée la *prime de risque sur le marché des changes*

L'argument de Fama

- ▶ Maintenant nous voulons montrer que l'évidence empirique montre que, pour expliquer le comportement observé des taux de change au comptant et à terme, il faudrait que la prime de risque sur le marché des change soit **variable**
- ▶ Considérons la régression que les chercheurs ont utilisée à **maintes** reprises (voir Fama 1984) afin de tester l'hypothèse que le taux à terme est un prédicteur non biaisé du taux au comptant futur
- ▶ Cette équation est donnée par

$$(s_{t+1} - s_t) = a_0 + a_1 (f_t - s_t) + \varepsilon_{t+1} \quad (14)$$

Nous utilisons des lettres en miniscule pour représenter les logarithmes des variables. Ici, a_0 et a_1 sont des paramètres à estimer, et ε_{t+1} est un terme d'erreur aléatoire

Fama (suite)

- ▶ Nous soustrayons le log du taux au comptant courant s_t des deux côtés de l'équation à cause du problème de *non-stationnarité* dont nous avons parlé la première semaine du cours
- ▶ Sous l'hypothèse nulle que le taux à terme est un prédicteur non biaisé du taux au comptant futur, le paramètre a_1 est égal à un ($H_0 : a_1 = 1$)
- ▶ Le résultat habituel auquel les chercheurs arrivent en estimant cette équation est que le coefficient estimé \hat{a}_1 est **négatif**.

- ▶ Une explication possible de ce résultat est l'existence d'une **variable omise**, qui donnerait une corrélation non nulle entre la variable explicative $(f_t - s_t)$ et le terme d'erreur ε_{t+1}
- ▶ Cette variable omise pourrait être la prime de risque. Si

$$rp_t \equiv f_t - E_t(s_{t+1}),$$

la bonne forme de l'équation sous H_0 est

$$(s_{t+1} - s_t) = a_0 + a_1 (f_t - s_t) - rp_t + \varepsilon_{t+1},$$

avec $H_0 : a_1 = 1$

- ▶ Puisque la prime de risque rp_t n'est pas observable, elle est regroupée avec le terme d'erreur de l'équation, menant à un problème classique de variable omise.

Fama (suite)

- ▶ Si, par la suite, la corrélation entre $(f_t - s_t)$ et rp_t n'est pas nulle, l'estimé du coefficient a_1 sera biaisé
- ▶ Si nous mesurons les variables en déviations par rapport à leurs moyennes, la constante a_0 de l'équation (14) disparaît et l'estimateur MCO de a_1 est

$$\hat{a}_1 = (f'f)^{-1} f's,$$

où f est le **vecteur** des observations sur f_t , et s est le vecteur des observations sur s_t

Fama (suite)

- ▶ Sous l'hypothèse des attentes rationnelles, nous avons que $(s_{t+1} - E_t(s_{t+1}))$ doit être **non corrélé** avec toute information disponible en t
- ▶ S'il y a une variable dans l'ensemble d'information en t , elle pourrait être utilisée par les individus afin d'améliorer leur prévision de s_{t+1} .
- ▶ Ceci veut dire, entre autres, que

$$E_t((f_t - s_t)(s_{t+1} - E_t(s_{t+1}))) = 0$$

puisque les variables f_t et s_t sont dans l'ensemble d'information disponible en t

- ▶ L'algèbre des estimateurs MCO a pour conséquence que

$$\text{plim}(a_1) = \frac{\text{Cov}((f_t - s_t), (s_{t+1} - s_t))}{\text{Var}(f_t - s_t)}$$

Fama (suite)

- ▶ On a

$$f_t - s_t \equiv E_t(s_{t+1}) - s_t + rp_t \quad (15)$$

- ▶ Donc

$$\begin{aligned} \text{plim}(a_1) &= \frac{\text{Cov}((f_t - s_t), ((s_{t+1} - E_t(s_{t+1})) + (E_t(s_{t+1}) - s_t)))}{\text{Var}(f_t - s_t)} \\ &= \frac{\text{Cov}((f_t - s_t), (E_t(s_{t+1}) - s_t))}{\text{Var}(f_t - s_t)} \\ &= \frac{\text{Cov}((E_t(s_{t+1}) - s_t + rp_t), (E_t(s_{t+1}) - s_t))}{\text{Var}(f_t - s_t)} \\ &= \frac{\text{Var}(E_t(s_{t+1}) - s_t) + \text{Cov}(rp_t, (E_t(s_{t+1}) - s_t))}{\text{Var}(f_t - s_t)} \quad (16) \end{aligned}$$

Fama (suite)

- ▶ Puisque les variances sont toujours positives, le plim de a_1 peut être négative **si et seulement si** le dernier terme du numérateur dans l'équation (16), la covariance, est suffisamment négative
- ▶ Il **doit y avoir** une covariance négative entre la prime de risque et le taux de dépréciation anticipé du taux au comptant
- ▶ En plus, cette covariance doit être **plus élevée** que la variance du taux de dépréciation anticipé
- ▶ Ceci n'est peut-être pas trop surprenant. Comme nous avons vu dans le premier chapitre sur les faits stylisés, le taux de change au comptant est bien approximé par une marche aléatoire. Ceci implique que le taux de dépréciation anticipé est bien approximé par zéro et que probablement sa variance est relativement faible

Fama (suite)

- ▶ Ceci est possible **si et seulement si** la prime de risque elle-même est variable
- ▶ La prime de risque, selon notre développement théorique, dépend de la **covariance conditionnelle** entre le taux au comptant futur et l'expression

$$\beta \frac{P_t}{P_{t+1}} \frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)} (1 + i_{t+1})$$

- ▶ Si on veut construire un modèle empirique il s'agit presque inévitablement d'un modèle du type "ARCH" (autoregressive conditional heteroscedasticity) ou bien d'un modèle "GARCH" (generalized autoregressive conditional heteroscedasticity)
- ▶ Dans ces modèles, les variances et les covariances entre variables peuvent fluctuer dans le temps

Fama (suite)

- ▶ Une première étude empirique est celle de Domowitz et Hakkio (1985)
- ▶ Voir l'article de Nijman et Palm et Wolff (1993) pour un bon survol de la question. J'ai téléchargé une copie sur mon site
- ▶ Une dernière remarque s'impose avant de passer à l'analyse de Domowitz et Hakkio
- ▶ Nous avons vu comment selon l'équation (16), pour expliquer un coefficient a_1 qui est négatif (ce qui est toujours le cas lorsqu'on estime l'équation par MCO), il faut que la covariance entre la prime de risque et le taux de dépréciation anticipé soit négative et plus grande en valeur absolue que la variance du taux de dépréciation anticipé.

Fama (suite)

- ▶ Nous avons déjà vu dans le chapitre sur les faits caractéristiques que le taux de dépréciation du taux de change est très difficile à prédire, et il n'est presque pas relié à des variables macroéconomiques observables
- ▶ Il est possible que pour cette raison la variance du taux de dépréciation anticipé soit plutôt faible
- ▶ Si ceci le cas, un coefficient a_1 négatif n'est peut-être pas si surprenant

Domowitz et Hakkio

- ▶ Afin de relier la prime de risque variable à des choses **observables**, il faut un modèle d'équilibre général
- ▶ Comme nous allons voir, même le modèle le plus simple n'est pas facile à résoudre
- ▶ Domowitz et Hakkio (1985) développent un tel modèle, mais finissent par un modèle simple avec un terme d'erreur ARCH, non relié à des variables observables
- ▶ Nous suivons dans cette section la présentation de Nijman, Palm et Wolff (1993), qui est bien plus succincte que celle de l'article original

Domowitz et Hakkio (suite)

- ▶ Puisqu'il s'agit d'un modèle d'équilibre général, nous devons ajouter quelques hypothèses supplémentaires par rapport à la section précédente
- ▶ Le modèle est basé sur le modèle célèbre de Lucas (1982)
- ▶ C'est différent par rapport aux modèles que nous avons vus puisque les biens échangeables produits par les deux pays sont **différents** (des substituts imparfaits)
- ▶ Le but ultime est de faire dépendre le taux de change bilatéral dans un modèle à deux pays des stocks monétaires de ces deux pays

Domowitz et Hakkio (suite)

- ▶ Il y a deux pays différents
- ▶ Le premier reçoit une dotation stochastique de $2X_t$ unités du bien X
- ▶ Le deuxième reçoit une dotation stochastique de $2Y_t$ unités du bien Y
- ▶ Les marchés sont complets au sens du modèle Arrow-Debreu: il y a un partage parfait des risques
- ▶ Par conséquent l'agent représentatif de **chaque** pays reçoit la moitié de la dotation totale de chaque pays, soit X unités du bien X et Y unités du bien Y

Domowitz et Hakkio (suite)

- ▶ La fonction d'utilité de l'agent domestique est donnée par

$$\begin{aligned} U &= E_t \left(\sum_{i=0}^{\infty} \beta^i U(C_{t+i}) \right) \\ &= E_t \left(\sum_{i=0}^{\infty} \beta^i U(X_{t+i}, Y_{t+i}) \right) \end{aligned} \quad (17)$$

Domowitz et Hakkio (suite)

- ▶ Les CPOs pour la maximisation de l'utilité par l'agent domestique ont pour conséquence que le taux marginal de transformation entre les biens X et Y , qui est tout simplement le taux de change réel, doit être égal au taux marginal de substitution
- ▶ Nous avons

$$\frac{S_t P_t^Y}{P_t^X} = \frac{\partial U / \partial Y_t}{\partial U / \partial X_t}, \quad (18)$$

où P_t^Y est le prix nominal du bien Y exprimé en devises du pays 2 et P_t^X est le prix nominal du bien X exprimé en devises du pays 1

Domowitz et Hakkio (suite)

- ▶ Les agents doivent payer leurs achats du bien X en monnaie du pays 1 et du bien Y en monnaie du pays 2
- ▶ Ces **contraintes de paiement préalable en espèces** ont pour conséquence que

$$2X_t P_t^X = M_t, \quad (19)$$

$$2Y_t P_t^Y = N_t, \quad (20)$$

où M_t est le stock monétaire du premier pays et N_t est le stock monétaire du deuxième pays

- ▶ Combinant ces deux équations avec l'équation (18), nous avons une solution pour le taux de change au comptant nous avons

$$S_t = \frac{M_t}{N_t} \frac{Y_t}{X_t} \frac{\partial U / \partial Y_t}{\partial U / \partial X_t} \quad (21)$$

Domowitz et Hakkio (suite)

- ▶ Un actif dénommé en devises du pays 1 dont le taux de rendement nominal est certain en période t obéit à la condition suivante (voir la première section de ce chapitre):

$$(1 + i_{t+1}^M) E_t \left(\beta \frac{\partial U / \partial X_{t+1}}{\partial U / \partial X_t} \frac{P_t^X}{P_{t+1}^X} \right) = 1 \quad (22)$$

- ▶ Un actif dénommé en devises du pays 2 avec un rendement nominal certain en période t obéit à

$$(1 + i_{t+1}^N) E_t \left(\beta \frac{\partial U / \partial Y_{t+1}}{\partial U / \partial Y_t} \frac{P_t^Y}{P_{t+1}^Y} \right) = 1 \quad (23)$$

- ▶ Finalement, si les marchés financiers sont efficients, la **parité couverte** des taux d'intérêt tient et

$$(1 + i_{t+1}^M) = (1 + i_{t+1}^N) F_t / S_t \quad (24)$$

Domowitz et Hakkio (suite)

- ▶ Les autres hypothèses du modèle utilisé par Domowitz et Hakkio ont pour but de permettre la dérivation algébrique d'un lien entre la prime de risque sur le marché à terme et la variabilité conditionnelle de certaines variables explicatives du modèle (les stocks monétaires)
- ▶ Afin d'arriver à ce but, les auteurs posent des restrictions sur la forme fonctionnelle de la fonction d'utilité et sur les processus stochastiques qui génèrent les stocks monétaires

Domowitz et Hakkio (suite)

- ▶ Nous supposons une fonction d'utilité Cobb-Douglas:

$$U(X_t, Y_t) = X_t^\alpha Y_t^{1-\alpha}.$$

- ▶ Ceci n'est pas supposé être une hypothèse réaliste. En fait, si on double les quantités de X_t et de Y_t l'utilité double, donc il n'y a pas une utilité marginale décroissante dans la consommation totale

Domowitz et Hakkio (suite)

- ▶ Les logs des stocks monétaires suivent des processus AR(1):

$$\ln(M_t) = \rho_M \ln(M_{t-1}) + \mu_t^M, \quad (25)$$

$$\ln(N_t) = \rho_N \ln(N_{t-1}) + \mu_t^N, \quad (26)$$

où μ_t^M et μ_t^N sont des chocs imprévisibles avec des moyennes nulles et des variances égales à h_t^M et h_t^N

- ▶ Ces variances **peuvent varier dans le temps** mais on suppose que la covariance entre les deux chocs est zéro
- ▶ Ceci veut dire qu'en fait il s'agit d'un modèle avec variances conditionnelles non constantes
- ▶ Ici, $0 < \rho_M < 1$ et $0 < \rho_N < 1$ mesurent les persistance des chocs aux stocks monétaires.

Domowitz et Hakkio (suite)

- ▶ Ces restrictions ont pour conséquence (à partir de l'équation (21)) que

$$\begin{aligned} S_t &= \frac{M_t}{N_t} \frac{Y_t}{X_t} \frac{\partial U / \partial Y_t}{\partial U / \partial X_t} \\ &= \frac{M_t}{N_t} \frac{Y_t}{X_t} \frac{(1 - \alpha) X_t^\alpha Y_t^{-\alpha}}{\alpha X_t^{\alpha-1} Y_t^{1-\alpha}} \\ &\Rightarrow S_t = c \frac{M_t}{N_t}, \end{aligned} \tag{27}$$

avec $c \equiv (1 - \alpha) / \alpha$

- ▶ C'est déjà une simplification énorme. Le taux de change d'équilibre ne dépend que du ratio des deux stocks monétaires

Domowitz et Hakkio (suite)

- ▶ Finalement, on suppose les lois de mouvement suivantes pour les dotations dans les deux pays:

$$\ln(X_t) = \rho_X \ln(X_{t-1}) + \mu_t^X, \quad (28)$$

$$\ln(Y_t) = \rho_Y \ln(Y_{t-1}) + \mu_t^Y, \quad (29)$$

où μ_t^X et μ_t^Y sont des chocs imprévisibles avec des moyennes nulles et des variances égales à h_t^X et h_t^Y , et $0 < \rho_X < 1$ et $0 < \rho_Y < 1$ des paramètres qui captent la persistance

- ▶ Encore une fois, on suppose que la covariance entre les chocs (et entre les chocs réels et les chocs monétaires) est zéro

Domowitz et Hakkio (suite)

- Nous avons

$$\begin{aligned} & E_t \left(\frac{\partial U}{\partial X_{t+1}} \frac{1}{P_{t+1}^X} \right) \\ &= E_t \left(\alpha X_{t+1}^{(\alpha-1)} Y_{t+1}^{(1-\alpha)} / P_{t+1}^X \right) \\ &= \alpha E_t \left(X_{t+1}^\alpha Y_{t+1}^{(1-\alpha)} / (M_{t+1}/2) \right) \\ &= 2\alpha E_t \exp(\alpha x_{t+1} + (1-\alpha)y_{t+1} - m_{t+1}) \\ &= 2\alpha E_t \exp \left(\alpha(\rho_X x_t + \mu_{t+1}^X) + (1-\alpha)(\rho_Y y_t + \mu_{t+1}^Y) \right. \\ &\quad \left. - (\rho_M m_t + \mu_{t+1}^M) \right) \\ &= 2\alpha \exp \left(\alpha \rho_X x_t + (1-\alpha)\rho_Y y_t - \rho_M m_t \right. \\ &\quad \left. + 0.5 \left(\alpha^2 h_t^X + (1-\alpha)^2 h_t^Y + h_t^M \right) \right), \end{aligned} \quad (30)$$

Domowitz et Hakkio (suite)

- ▶ Les variables en minuscule sont de logs
- ▶ Nous utilisons ici la propriété des variables aléatoires que

$$E(\exp(x)) = \exp(\mu + .5\sigma^2)$$

lorsque $x \sim N(\mu, \sigma^2)$. Donc $\exp(x)$ est une variable log-normale

- ▶ Il y a une démonstration détaillée de cette proposition dans l'Annexe B.
- ▶ Ici, h_t^X , $h_t^Y + h_t^M$ sont les variances (non constantes) des innovations (chocs) μ_t^X , $\mu_t^Y + \mu_t^M$
- ▶ Nous utilisons aussi l'hypothèse que les h_t^i sont non corrélés

Domowitz et Hakkio (suite)

- ▶ Maintenant, substituant dans l'équation (22), nous avons

$$(1 + i_{t+1}^M) = \beta^{-1} \exp \left(\alpha(1 - \rho_x)x_t(1 - \alpha)(1 - \rho_y)y_t - (1 - \rho_m)m_t \right. \\ \left. - 0.5 \left(\alpha^2 h_t^X + (1 - \alpha)^2 h_t^Y + h_t^M \right) \right) \quad (31)$$

- ▶ De manière semblable, substituant dans (23), nous avons

$$(1 + i_{t+1}^N) = \beta^{-1} \exp \left(\alpha(1 - \rho_x)x_t(1 - \alpha)(1 - \rho_y)y_t - (1 - \rho_n)n_t \right. \\ \left. - 0.5 \left(\alpha^2 h_t^X + (1 - \alpha)^2 h_t^Y + h_t^N \right) \right) \quad (32)$$

Domowitz et Hakkio (suite)

- ▶ Substituant dans (24), nous avons

$$f_t = \ln(c) + \rho_m m_t - \rho_n n_t - .5h_t^M + .5h_t^N \quad (33)$$

- ▶ Substituant dans (27), nous avons

$$E_t s_{t+1} = \ln(c) + \rho_m m_t - \rho_n n_t \quad (34)$$

- ▶ Nous arrivons finalement à

$$E_t s_{t+1} - f_t = .5(h_t^M - .5h_t^N) \quad (35)$$

- ▶ Cette équation relie la prime de risque (en logs) aux **variances conditionnelles** des stocks monétaires

Résultats principaux

- ▶ Au lieu d'inclure comme variables explicatives dans l'équation du taux de change des variances conditionnelles des stocks monétaires, Domowitz et Hakkio supposent un lien entre la prime de risque et la taille de l'innovation sur le taux de change au comptant lui-même
- ▶ Ils estiment une équation de la forme

$$\frac{S_{t+1} - S_t}{S_t} = \beta_0 + \beta_1 \frac{F_t - S_t}{S_t} + \theta h_t + \epsilon_t, \quad (36)$$

où

$$h_t^2 = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 \epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2^2 \epsilon_{t-2}^2 + \alpha_3^2 \epsilon_{t-3}^2 + \alpha_4^2 \epsilon_{t-4}^2 \quad (37)$$

Résultats principaux (suite)

► Remarques:

1. C'est un modèle du type "ARCH"
2. Les innovations sur le taux de change affectent sa variance conditionnelle par le biais de l'équation (37)
3. Les coefficients de l'équation (37) sont positifs par construction (ou par hypothèse), puisqu'on suppose qu'une innovation importante (ϵ_{t-j}^2 grand) affecte la variance conditionnelle de façon positive. La constante est positive pour garantir une variance conditionnelle positive
4. Sous l'absence de prime de risque, on doit avoir $\beta_0 = \theta = 0$, $\beta_1 = 1$, et ϵ_t non autocorrélé. Une façon de tester pour l'existence d'une prime de risque serait de tester cette hypothèse jointe

Résultats (suite)

► Remarques (suite):

5. Si on s'intéresse à la prime de risque comme une façon d'aider à prédire le taux de change futur, le coefficient qui est vraiment intéressant est le θ . S'il est grand en valeur absolue et significative, cela pourrait nous permettre de générer des prédictions du taux de change futur qui permettrait de faire mieux que le modèle de marche aléatoire
6. Dépendant des valeurs de β_0 et de θ , la prime de risque pourrait être soit positive soit négative et pourrait changer de signe au cours de l'échantillon

Résultats (suite)

- ▶ Les auteurs trouvent des estimateurs $\hat{\theta}$ qui sont en général des valeurs très faibles et qui sont systématiquement non significatifs
- ▶ L'équation fondamentale à laquelle Domowitz et Hakkio arrivent (35) nous dit que, si les variances conditionnelles des stocks monétaires sont constantes, la prime de risque sera elle aussi constante
- ▶ Ceci explique l'importance et la fréquence de modèles du type "ARCH" appliqués à la détermination des taux de change
- ▶ L'équation explique aussi pourquoi (probablement) les chercheurs ont eu peu de succès à expliquer les variations de la prime de risque: la **variabilité** des variables explicatives dans les modèles du taux de change ne fluctue pas beaucoup (et pas assez) dans le temps

Résultats (suite)

- ▶ Voir les remarques de Marrinan à ce sujet. Elle écrit (1989, p.48):

To test the theory it is necessary to find a good measure, not only of conditional expectations, but also of the conditional variances of future money supply growth rates, productivity growth rates and government spending shares. Tests of the theory so far have not done very well. Variability in those things thought to determine the risk premium seems to be too small to explain it except at implausibly high degrees of risk aversion.

Résultats (suite)

- ▶ Nous pouvons aussi expliquer pourquoi le taux au comptant est si difficile à prédire. Sous attentes rationnelles, nous avons la décomposition suivante:

$$s_{t+1} = E_t s_{t+1} + v_{t+1}, \quad (38)$$

où v_{t+1} est une erreur de prévision non corrélée avec de l'information disponible en t

- ▶ De l'équation (35), nous avons

$$s_{t+1} = f_t + .5(h_t^M - .5h_t^N) + v_{t+1}. \quad (39)$$

- ▶ **Même si** l'erreur de prévision des individus est petite, si on ne réussit pas à bien estimer la prime de risque et ses variations dans le temps, ce modèle ne générera pas des prédictions précises du taux au comptant futur

Résultats (suite)

- ▶ Notez que les deux derniers termes dans l'équation (39) sont non observables
- ▶ Il y a deux interprétations possibles de la faible qualité du taux à terme comme prédicteur du taux au comptant futur
 1. La prime de risque est très variable et mal expliquée par nos théories
 2. L'erreur de prévision des participants au marché est très importante

D'autres explications pour le biais du taux à terme

- ▶ L'existence de primes de risque variables n'est pas la seule explication possible de la mauvaise performance du taux à terme comme prédicteur du taux au comptant futur
- ▶ Il y a aussi des approches qui laissent tomber l'hypothèse des attentes rationnelles (Lewis, 1989)
- ▶ Finalement, il y a quelques articles (notamment Baldwin, 1991) qui explorent les conséquences des **coûts de transaction** pour la relation entre le taux à terme et le taux au comptant futur.

Conclusions

- ▶ La littérature empirique sur les primes de risque et le lien entre le taux de change à terme et le taux de change au comptant est vaste
- ▶ Avec les outils développés dans ce chapitre des notes, les lecteurs pourront au moins aborder cette littérature avec une idée des enjeux principaux
- ▶ La modélisation empirique des taux de change et leur prédiction sont parfois frustrantes, mais il y a encore beaucoup de travail intéressant à faire dans le domaine

Références

Baldwin, Richard (1991), “Re-Interpreting the Failure of Foreign Exchange Market Efficiency Tests: Small Transaction Costs, Big Hysteresis Bands.” NBER working paper 3319

Domowitz, Ian and Craig Hakkio (1985), “Conditional Variance and the Risk Premium in the Foreign Exchange Market.” *Journal of International Economics* 19, 47–66

Engel, Charles M. (1992), “The Risk Premium and the Liquidity Premium in Foreign Exchange Markets.” *International Economic Review* 33, 879–879

Engel, Charles M. (1992b), “On the Foreign Exchange Risk Premium Premium in a General Equilibrium Model” *Journal of International Economics* 32, 305–319

Engel, Charles M. (1996), “The Forward Discount Anomaly and the Risk Premium: A Survey of Recent Evidence.” *Journal of Empirical Finance* 3, 123–192

Références (suite)

Engel, Charles (2014), “Chapter 8 - Exchange Rates and Interest Parity.” in Gita Gopinath, Elhanan Helpman and Kenneth Rogoff (eds.) *Handbook of International Economics*. Elsevier, Volume 4, 453–522

Engel, Charles M. (2016), “Exchange Rates, Interest Rates, and the Risk Premium.” *American Economic Review* 106, 436–474

Fama, Eugene (1984), “Spot and Forward Exchange Rates.” *Journal of Monetary Economics* 14, 319–338

Iwata, Shiguru and Shu Wu (2006), “Macroeconomic Shocks and the Foreign Exchange Risk Premia.” *Macroeconomic Dynamics* 10, 439–466

Lewis, Karen (1996), “What Can Explain the Apparent Lack of International Consumption Risk Sharing?” *Journal of Political Economy* 104, 267–297

Références (suite)

Lucas, Robert E. (1982), “Interest Rates and Currency Prices in a Two-Country World.” *Journal of Monetary Economics* 10, 335–360

Marrinan, Jane (1989), “Exchange Rate Determination: Sorting out Theory and Evidence”, *New England Economic Review* November/December, 39–51

Nijman, Theo E., Franz C. Palm and C.C.P. Wolff (1993), “Premia in Forward Foreign Exchange as Unobserved Components.” *Journal of Business and Economic Statistics* 11, 361–365

Rogoff, Kenneth and Vania Stavrakeva (2008), “The Continuing Puzzle of Short Horizon Exchange Rate Forecasting.” NBER working paper 14071

Références (cont.)

Sarno, Luca, Paul Schneider and Christian Wagner (2012), “Properties of Foreign Exchange Risk Premiums.” *Journal of Financial Economics* 105, 279–310

Stavrakeva, Vania and Jenny Tang (2015), “Exchange Rates and Monetary Policy.” Federal Reserve Bank of Boston working paper 15-16

<https://www.bostonfed.org/publications/research-department-working-paper/2015/exchange-rates-and-monetary-policy>

Stulz, René (1981), “A Model of International Asset Pricing.” *Journal of Financial Economics* 9, 383–406

Annexe A

- ▶ Dérivation alternative de la prime de risque
- ▶ Considérez le placement suivant
 1. Convertir un dollar en devises étrangères au taux au comptant S_t
 2. Placer les fonds sur le marché financier étranger au taux certain $(1 + i_{t+1}^*)$, où i_{t+1}^* est le taux de rendement (net) sur l'actif étranger sans risque entre t et $t + 1$
 3. Convertir les fonds en dollars en $t + 1$ au taux au comptant prévalant en $t + 1$

Annexe A (suite)

- Pour ce placement notre théorie générale de l'évaluation des actifs dit que

$$E_t \left(\beta (1 + i_{t+1}^*) \frac{S_{t+1}}{S_t} \frac{P_t}{P_{t+1}} \frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)} \right) = 1.$$

- La parité couverte des taux d'intérêt nous dit que, en l'absence de coûts de transaction et pour des actifs étranger et domestique sans risques (ou avec des caractéristiques semblables),

$$(1 + i_{t+1}) = (1 + i_{t+1}^*) \frac{F_t}{S_t}.$$

$$\Rightarrow (1 + i_{t+1}^*) = (1 + i_{t+1}) \frac{S_t}{F_t}$$

Annexe A (suite)

- ▶ Substituant dans l'équation précédente, nous avons tout de suite que

$$E_t \left(\beta(1 + i_{t+1}) \frac{S_{t+1}}{F_t} \frac{P_t}{P_{t+1}} \frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)} \right) = 1,$$

ou

$$E_t \left(\beta(1 + i_{t+1}) S_{t+1} \frac{P_t}{P_{t+1}} \frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)} \right) = F_t,$$

- ▶ Ceci qui est l'équivalent de l'équation (5) du texte

Annexe B

- ▶ Propriétés de la loi log-normale
- ▶ Soit la variable aléatoire x qui suit une loi normale:

$$x \sim N(\mu, \sigma^2)$$

- ▶ Calculons une approximation de Taylor du deuxième ordre de la fonction $\exp(x)$ autour de sa moyenne μ :

$$\exp(x) \approx \exp(\mu) + \exp(\mu)(x - \mu) + .5 \exp(\mu)(x - \mu)^2$$

- ▶ Calculons l'espérance mathématique de cette dernière expression:

$$E \exp(x) \approx \exp(\mu) + .5 \exp(\mu) \sigma^2$$

$$= \exp(\mu)(1 + .5\sigma^2)$$

$$\approx \exp(\mu) \exp(.5\sigma^2)$$

$$= \exp(\mu + .5\sigma^2).$$

Annexe B (suite)

- ▶ La dernière approximation est une conséquence directe du fait que

$$\ln(1 + X) \approx X$$

pour X suffisamment petit

- ▶ Donc, si le logarithme d'une variable suit une loi normale avec une moyenne égale à μ et une variance égale à σ^2 , la variable elle-même a une moyenne égale à $\exp(\mu + .5\sigma^2)$

Cette version: **29/11/2023**